Prof. Dr. Giovanna Morigi Stefan Schütz, Rick Dannert

Seminar zur Vorlesung
Quantentheorie des Lichtes

SoSe 2012 **Blatt 1** **24 April**

(Vorrechnen am 8. Mai)

Aufgabe 1 *Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes (em-Feld) und Maxwell-Gleichungen.*

Die Lagrange-Dichte des em-Feldes ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \frac{|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{B}|^2}{8\pi} - \rho\phi + \frac{\mathbf{j}\cdot\mathbf{A}}{c}, \tag{1}$$

wobei ρ die Ladungsdichte, $\mathbf{j}$ die Stromdichte, $\mathbf{A}$ das Vektorpotential und ϕ das Skalarpotential bezeichnet.
Leiten Sie mit Hilfe der Euler-Lagrange Gleichungen für $\mathbf{A}$ und ϕ die Maxwell-Gleichungen ab. *(3 Punkte)*

Aufgabe 2 *Eindimensionaler harmonischer Oszillator*

Gegeben sei der Hamiltonoperator für einen harmonischen Oszillator

$$\hat{H} = \hbar\omega\big(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\big) \tag{2}$$

mit $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, wobei $\hat{a}$ der Vernichtungs- und $\hat{a}^\dagger$ der Erzeugungsoperator ist.

a) Leiten Sie die Zeitabhängigkeit der Operatoren $\hat{a}(t)$ und $\hat{a}^\dagger(t)$ im Heisenbergbild her und bestimmen Sie daraus die Zeitabhängigkeit der Operatoren $\hat{x}(t)$ und $\hat{p}(t)$.

(1 Punkt)

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\hat{x}(t)\rangle$ und $\langle\hat{p}(t)\rangle$ sowie die dazugehörigen Varianzen $\Delta x(t)$ und $\Delta p(t)$ für einen Fockzustand $|n\rangle$ mit

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}\,|n\rangle = n\,|n\rangle\,. \tag{3}$$

(2 Punkte)

b) Berechnen Sie $\langle\hat{x}(t)\rangle$ und $\langle\hat{p}(t)\rangle$ sowie die dazugehörigen Varianzen $\Delta x(t)$ und $\Delta p(t)$ für einen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ mit

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle\,. \tag{4}$$

(2 Punkte)

Aufgabe 3 *Getriebenes Zwei-Niveau-System (Rabi Oszillationen)*

Wir betrachten ein ruhendes Atom, das durch ein Zwei-Niveau-System angenähert werden kann, wobei $|g\rangle$ der Grundzustand und $|e\rangle$ der angeregte Zustand ist. Die Übergangsfrequenz wird mit ω_0 bezeichnet. Der ungestörte Hamiltonoperator lautet somit

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_0 \, |e\rangle \langle e| \, , \tag{5}$$

wobei die Energie des Grundzustandes auf Null gesetzt wurde.
Wird das Atom zusätzlich durch einen klassischen Laser mit Frequenz ω_L getrieben, so nimmt die Wechselwirkung in der sogenannten Dipol- und Drehwellennäherung folgende Form an

$$\hat{V} = \hbar\Omega \left(|e\rangle \langle g| \, e^{-i\omega_L t} + |g\rangle \langle e| \, e^{i\omega_L t} \right) \tag{6}$$

Die Kopplungsstärke zwischen dem atomaren Dipol und dem Laserfeld ist durch die Rabifrequenz Ω gegeben. Der Gesamthamiltonian lautet somit

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}. \tag{7}$$

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung $|\psi(t)\rangle$ der zeitabhängigen Schrödingergleichung für einen beliebigen Anfangszustand $|\psi(0)\rangle$.
Hinweis: Die explizite Zeitabhängigkeit im Hamiltonian kann durch die unitäre Transformation $\left|\tilde{\psi}(t)\right\rangle = e^{i\omega_L |e\rangle\langle e| t} \, |\psi(t)\rangle$ eliminiert werden. *(3 Punkte)*

b) Betrachten wir nun die Dyson-Reihe, mit Hilfe derer eine zeitabhängige Störungsrechnung der Dynamik des Systems vorgenommen werden kann. Leiten sie hierfür die zeitabhängige Schrödingergleichung im Wechselwirkungsbild her. Die Dynamik des Systems kann durch den Zeitentwicklungsoperator $\hat{U} = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$ beschrieben werden. Beweisen Sie anhand der Schrödingergleichung im Wechselwirkungsbild, dass dieser der Differentialgleichung

$$i\hbar\partial_t \tilde{\hat{U}} = \tilde{\hat{V}}\tilde{\hat{U}} \tag{8}$$

genügt. Hierbei ist $\tilde{\hat{U}}$ der Zeitentwicklungsoperator im Wechselwirkunsgbild. Zeigen Sie, dass Gl. (8) in eine Reihe der Form

$$\tilde{\hat{U}} = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt_1 \tilde{\hat{V}}(t_1) + \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t dt_1 \tilde{\hat{V}}(t_1) \int_0^{t_1} dt_2 \tilde{\hat{V}}(t_2) \quad \cdots \tag{9}$$

geschrieben werden kann, welche als Dyson-Reihe bekannt ist. *(2 Punkte)*

c) Berechnen Sie die zeitliche Entwicklung eines beliebigen Anfangszustandes $\left|\tilde{\psi}(0)\right\rangle$ störungstheoretisch, indem Sie Dyson-Reihe bis zur 2.Ordnung in $\tilde{\hat{V}}$ berechnen.
Hinweis: Geben Sie das Resultat im Schrödingerbild an, um es mit dem aus a) zu vergleichen. *(2 Punkte)*

d) Unter welchen Annahmen für die Parameter Ω, $\Delta = \omega_L - \omega_0$ und t sind die Ergebnisse aus a) und c) vergleichbar? Geben Sie eine Begründung. *(1 Punkt)*