Prof. Dr. Giovanna Morigi Stefan Schütz, Rick Dannert

Seminar zur Vorlesung Quantentheorie des Lichtes

SoSe 2012 **Blatt 2** **2 Mai**

(Vorrechnen am 9. Mai)

Aufgabe 1 *Kohärenter Zustand*

Der sogenannte *kohärente Zustand* stellt einen besonderen Fall eines Quantenzustandes des quantisierten harmonischen Oszillators dar, da dessen Dynamik am ehesten das Schwingungsverhalten eines klassischen harmonischen Oszillators wiedergibt. Mathematisch ist der kohärente Zustand $|\alpha\rangle$ definiert als Eigenzustand des Vernichtungsoperators $\hat{a}$ mit Eigenwert α

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle\,. \tag{1}$$

Da $\hat{a}$ nicht hermitesch ist, ist α im Allgemeinen eine komplexe Zahl. Der kohärente Zustand kann mit der Hilfe des *Verschiebungsoperators* aus dem Vakuum-Zustand $|0\rangle$ erzeugt werden

$$D(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle, \tag{2}$$

wobei der Verschiebungsoperator definiert ist als

$$D(\alpha) = e^{|\alpha|^2/2} e^{-\alpha^* \hat{a}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger}. \tag{3}$$

a) Verwenden Sie das Theorem

$$e^{\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}} = e^{-\frac{1}{2}[\hat{\mathrm{A}},\hat{\mathrm{B}}]} e^{\hat{\mathrm{A}}} e^{\hat{\mathrm{B}}} = e^{\frac{1}{2}[\hat{\mathrm{A}},\hat{\mathrm{B}}]} e^{\hat{\mathrm{B}}} e^{\hat{\mathrm{A}}}, \tag{4}$$

das gilt, falls zwei Operatoren $\hat{\mathrm{A}}$ und $\hat{\mathrm{B}}$ die Vertauschungsrelationen

$$[\hat{\mathrm{A}},[\hat{\mathrm{A}},\hat{\mathrm{B}}]] = [\hat{\mathrm{B}},[\hat{\mathrm{A}},\hat{\mathrm{B}}]] = 0 \tag{5}$$

erfüllen, sowie die Eigenschaften des kohärenten Zustandes, um die folgenden Beziehungen zu beweisen

$$\langle 0|D^\dagger(\alpha)\hat{a}D(\alpha)|0\rangle = \alpha \tag{6}$$
$$\langle 0|D^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger D(\alpha)|0\rangle = \alpha^*\,. \tag{7}$$

(2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass der kohärente Zustand aus dem Vakuum-Zustand durch die Gleichung

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle \tag{8}$$

erzeugt werden kann. *(2 Punkte)*

c) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit n Photonen in einem kohärenten Zustand zu finden, gegeben ist durch

$$P(n) = \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!}. \tag{9}$$

Geben Sie den Mittelwert $\langle n \rangle$ und die Standardabweichung Δn an. Welcher Statistik entspricht diese Verteilung?

(3 Punkte)

Aufgabe 2 *Gequetschter Zustand*

Ein *gequetscher Zustand* $|\xi\rangle$ einer einzelnen Mode wird erzeugt durch

$$|\xi\rangle = S(\xi)|0\rangle \tag{10}$$

$$S(\xi) = \exp\left(\frac{\xi^* \hat{a}^2 - \xi \hat{a}^{\dagger 2}}{2}\right). \tag{11}$$

Hier ist $S(\xi)$ der Quetschoperator (squeezing operator), worin $\xi = r \exp(2\mathrm{i}\phi)$ eine beliebige komplexe Zahl ist. Orts- und Impulsoperator können auch wie folgt dimensionslos geschrieben werden,

$$X = \hat{a} + \hat{a}^\dagger, P = -\mathrm{i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \tag{12}$$

Der Kommutator zwischen ihnen ist $[X, P] = 2\mathrm{i}$, so dass $\Delta X \Delta P \geq 1$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass $S(\xi)$ ein unitärer Operator ist. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie $\langle n \rangle$ und Δn für einen gequetschten Zustand $|\xi\rangle$. *(2 Punkte)*
Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Transformation $S^\dagger(\xi)\hat{a}S(\xi)$, $S^\dagger(\xi)\hat{a}^\dagger S(\xi)$, ...

c) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle X + \mathrm{i}P \rangle$, die Standardabweichungen ΔX und ΔP und daraus das Produkt $\Delta X \Delta P$ für einen gequetschten Zustand $|\xi\rangle$. *(2 Punkte)*

Ein *gequetschter Zustand zweier Moden* (two-mode squeezed state) ist gegeben durch

$$|G\rangle = S(G)|0\rangle, \tag{13}$$

wobei $S(G) = \exp(G^* \hat{a}_1 \hat{a}_2 - G \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger)$ der *Zwei-Moden-Quetschoperator* (two-mode squeezing operator) und $G = r \exp(\mathrm{i}\Theta)$ eine beliebige komplexe Zahl ist. Die Operatoren $\hat{a}_1$ und $\hat{a}_2$ (bzw. $\hat{a}_1^\dagger$ und $\hat{a}_2^\dagger$) bezeichnen jeweils die Vernichtungsoperatoren (bzw. Erzeugungsoperatoren) der Moden 1 und 2.

d) Zeigen Sie, dass $S(G)$ ein unitärer Operator ist. *(1 Punkt)*

e) Bestimmen Sie die Größen $\langle n_1 \rangle, \langle n_2 \rangle, \Delta n_1, \Delta n_2$ sowie $\Delta(n_1 - n_2)$ für einen gequetschten Zustand $|G\rangle$. *(3 Punkte)*

f) Wir definieren den Operator $\tilde{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger)$. Berechnen Sie $\langle \tilde{X} \rangle$ und $\Delta \tilde{X}$ für einen gequetschten Zustand $|G\rangle$. Für welche Werte (r, Θ) gilt $\Delta \tilde{X} < 1$? *(1 Punkt)*