Prof. Dr. Giovanna Morigi Stefan Schütz, Rick Dannert

Seminar zur Vorlesung
Quantentheorie des Lichtes

SoSe 2012 **Blatt 3** **23. Mai**

(Vorrechnen am 30. Mai)

Aufgabe 1 *Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld*

Wir betrachten die Lagrange-Funktion eines geladenen Teilchens mit Ladung q und Masse m im elektromagnetischen Feld

$$L = \frac{1}{2} m \underline{\dot{x}}^2 + \frac{q}{c} \underline{A} \cdot \underline{\dot{x}} - q\phi. \tag{1}$$

Hierbei sind $\underline{x}$ und $\underline{\dot{x}}$ die Position und Geschwindigkeit des Teilchens, wobei sich die elektromagnetischen Felder aus dem Vektorpotential $\underline{A}(\underline{x}, t)$ und dem skalaren Potential $\phi(\underline{x}, t)$ wie folgt ableiten lassen

$$\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}, \tag{2}$$

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A}. \tag{3}$$

a) Bestimmen Sie den kanonischen Impuls des Teilchens. *(1 Punkt)*

b) Bestimmen Sie die entsprechende Hamiltonfunktion für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld. *(1 Punkt)*

c) Leiten Sie die Lorentzkraft $\underline{F} = q\underline{E} + \frac{q}{c}(\underline{v} \times \underline{B})$ mit Hilfe der Lagrange-Gleichung ab. *(2 Punkte)*

Aufgabe 2 *Wahrscheinlichkeitsamplitude von Streuprozessen*

In dieser Aufgabe wollen wir einen störungstheoretischen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeitsamplitude S_{fi} von Streuprozessen in einem kurzreichweitigen Wechselwirkungspotential V angeben. Sei hierfür der Hamiltonoperator $H = H_0 + V$, wobei der bei $t_0 = -t/2$ präparierte Anfangszustand $|i\rangle$ und der bei $t_f = t/2$ präparierte Endzustand $|f\rangle$ Eigenzustände von H_0 sind, so daß

$$H_0 |i, f\rangle = E_{i,f} |i, f\rangle .$$

Ferner seien mit $|k\rangle$ die übrigen Energiezustände zu H_0 bezeichnet, für die die Vollständigkeitsrelation $\sum_k |k\rangle \langle k| = 1$, sowie die Orthonormalität $\langle j|k\rangle = \delta_{jk}$ gilt. Der Zeitentwicklungsoperator im Wechselwirkungsbild $\tilde{U}(t_f, t_0)$ gibt die gesamte Dynamik des Systems an, so daß die Wahrscheinlichkeitsamplitude S_{fi} geschrieben werden kann als

$$S_{fi} = \langle f | \, \tilde{U}(t_f, t_0) \, | i \rangle \, .$$

Ziel dieser Aufgabe ist es mit Hilfe der Dyson-Reihe

$$\tilde{U}(t_f, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{U}^{(n)}(t_f, t_0), \tag{4}$$

mit

$$\tilde{U}^{(n)}(t_f, t_0) = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \int\limits_{t_f \geq \tau_n \cdots \tau_2 \geq \tau_1 \geq t_0} d\tau_n \cdots d\tau_1 \tilde{V}(\tau_n) \cdots \tilde{V}(\tau_1) \tag{5}$$

die Wahrscheinlichkeitsamplitude bis zur zweiten Ordnung in V auszurechnen, so daß

$$S_{fi} \approx S_{fi}^{(0)} + S_{fi}^{(1)} + S_{fi}^{(2)}$$

a) Zeigen Sie zuerst, dass die sogenannte Beugungsfunktion (sinc-Funktion)

$$\delta^{(T)}(x) = \frac{\sin(xT)}{\pi x}$$

in der Form $\delta^{(T)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-T}^{T} e^{(ix\tau)} d\tau$ geschrieben werden kann und somit im Grenzfall $T \to \infty$ gegen die δ-Funktion strebt. Begründen Sie dies auch graphisch. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsamplitude S_{fi} bis zur ersten Ordnung in V für zeitunabhängige Wechselwirkungen ($V(t) = V$) gegeben ist durch

$$S_{fi}^{(0)} + S_{fi}^{(1)} = \delta_{fi} - 2\pi i V_{fi} \delta^{(T)}(E_f - E_i), \tag{6}$$

wobei $\delta_{fi} = \langle f | i \rangle$ und $V_{fi} = \langle f | \, V \, | i \rangle$. *(2 Punkte)*

c) Zeigen Sie entsprechend für $T = t_f - t_0 \gg 1$, dass

$$S_{fi}^{(2)} \approx -2\pi i \left[\lim_{\eta \to 0_+} \sum_k \frac{V_{fk} V_{ki}}{E_i - E_k + i\eta} \right] \delta^{(T)}(E_f - E_i), \tag{7}$$

indem Sie die folgende Relation verwenden

$$e^{-\frac{i}{\hbar} E_k (\tau_1 - \tau_2)} \Theta(\tau_1 - \tau_2) = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\eta \to 0_+} \int_{\infty}^{-\infty} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} E(\tau_1 - \tau_2)}}{E_i - E_k + i\eta} dE. \tag{8}$$

Erklären Sie kurz, warum im Grenzfall $T \to \infty$ die Energieerhaltung $E_f = E_i$ erfüllt ist. *(3 Punkte)*