Prof. Dr. Giovanna Morigi Stefan Schütz, Rick Dannert

Seminar zur Vorlesung
Quantentheorie des Lichtes

SoSe 2012 **Blatt 4** **6. Juni**

(Vorrechnen am 13. Juni)

Aufgabe 1 *Mechanische Effekte des Lichtes*

a) Zeigen Sie, dass

$$e^{i\mathbf{k}\hat{\mathbf{R}}}|\mathbf{P}\rangle = |\mathbf{P} + \hbar\mathbf{k}\rangle \qquad \text{gilt.} \tag{1}$$

Dabei ist $[\hat{\mathbf{R}}_i, \hat{\mathbf{P}}_j] = i\hbar\delta_{ij}$. *(1 Punkt)*

Gegeben Sie ein wasserstoffähnliches Atom, das in Wechselwirkung mit dem quantisierten elektromagnetischen Strahlungsfeld steht. Der Hamiltonoperator lässt sich schreiben als

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}} \tag{2}$$

mit $\hat{H}_0 = \hat{H}_{\text{atom}} + \hat{H}^{\perp}_{\text{emf}}$.

Der Hamiltonoperator für das Atom $\hat{H}_{\text{atom}} = \hat{H}_{\text{COM}} + \hat{H}_{\text{rel}}$ setzt sich aus einem Anteil für die Schwerpunktsbewegung $\hat{H}_{\text{COM}} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2_{\text{COM}}}{2M}$ und einem Anteil für die Relativbewegung $\hat{H}_{\text{rel}} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2_{\text{rel}}}{2\mu} - \frac{e^2}{|\hat{\mathbf{r}}|}$ zusammen. Die Energie des freien elektromagnetischen Strahlungsfeldes lässt sich als Summe harmonischer Oszillatoren $\hat{H}^{\perp}_{\text{emf}} = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda \hat{a}^\dagger_\lambda \hat{a}_\lambda + E_0$ schreiben. Die einzelnen Moden werden dabei mit λ bezeichnet. In der Dipolnäherung hat die Atom-Feld-Wechselwirkung die Form

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hat{H}^{(1)}_{\text{int}} + \hat{H}^{(2)}_{\text{int}} \tag{3}$$

mit

$$\hat{H}^{(1)}_{\text{int}} = \frac{|e|}{\mu c}\hat{\mathbf{p}}_{\text{rel}} \cdot \hat{\mathbf{A}}^{\perp}(\hat{\mathbf{R}})$$

$$\hat{H}^{(2)}_{\text{int}} = \frac{e^2}{2\mu c^2}\hat{\mathbf{A}}^{\perp}(\hat{\mathbf{R}}) \cdot \hat{\mathbf{A}}^{\perp}(\hat{\mathbf{R}})$$

$$\hat{\mathbf{A}}^{\perp}(\hat{\mathbf{R}}) = \sum_\lambda \mathbf{A}_\lambda \hat{a}_\lambda e^{i\mathbf{k}_\lambda\cdot\hat{\mathbf{R}}} + h.c.$$

$$\mathbf{A}_\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_\lambda}}\mathbf{e}_\lambda \text{ mit } \mathbf{e}_\lambda \perp \mathbf{k}_\lambda$$

b) Wir definieren den Impuls $\hat{\mathbf{P}}_{\text{tot}} = \hat{\mathbf{P}}_{\text{COM}} + \hat{\mathbf{P}}_{\text{emf}}$ mit

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{emf}} = \sum_\lambda \hbar\mathbf{k}_\lambda \hat{a}^\dagger_\lambda \hat{a}_\lambda \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass $[\hat{\mathbf{P}}_{\text{tot}}, \hat{H}_0] = 0$, sowie $[\hat{\mathbf{P}}_{\text{tot}}, \hat{H}_{\text{int}}] = 0$ gilt.

Was bedeutet dies physikalisch? *(3 Punkte)*

Aufgabe 2 *Optisches Gitter*

Wir betrachten die (eindimensionale) Bewegung eines Atoms, das mit einem klassischen Laser (stehende Welle) mit Frequenz ω_L wechselwirkt. In der Zwei-Niveau-Näherung für die inneren Freiheitsgrade des Atoms lautet der Hamiltonoperator in dem mit der Laserfrequenz rotierenden Bezugssystem

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \tag{5}$$

wobei

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \hbar\Delta|e\rangle\langle e|, \tag{6}$$

$$\hat{V} = \hbar\Omega\,(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|)\cos(k\hat{x}). \tag{7}$$

Dabei bezeichnet Ω die Kopplungsstärke des Lasers an den atomaren Übergang zwischen Grundzustand $|g\rangle$ und angeregtem Zustand $|e\rangle$ mit Übergangsfrequenz ω_0.
Des Weiteren ist $\Delta = \omega_L - \omega_0$ die Verstimmung der Laserfrequenz gegenüber der atomaren Übergangsfrequenz und $\hat{x}$ bzw. $\hat{p}$ der Orts- bzw. Impulsoperator der Schwerpunktsbewegung. Es gilt $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ sowie $\langle e|g\rangle = 0$ und $\langle g|g\rangle = \langle e|e\rangle = 1$.

Im Folgenden nehmen wir an, dass $|\Delta| \gg \Omega$. In diesem Fall kann ein räumlich variierendes Potential für das Atom geschaffen werden.

a) Berechnen Sie die Energieverschiebung $\delta E(\hat{x})$ des Grundzustands $|g\rangle$ in zweiter Ordnung in $\hat{V}$ mit Hilfe der (zeitunabhängigen) Störungstheorie. Vernachlässigen Sie dabei die kinetische Energie im ungestörten Hamiltonian $\hat{H}_0$ und nehmen Sie die Position des Atoms als fest an. *(2 Punkte)*

b) Der effektive Hamiltonoperator $\hat{H}_{\text{eff}}$ für die Bewegung des Atoms lässt sich schreiben als

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \delta E(\hat{x}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hbar\frac{\Omega^2}{\Delta}\cos^2(k\hat{x}) \tag{8}$$

Die positionsabhängige Energieverschiebung des Grundzustandes führt zu einem periodischen Potential. Man spricht von einem optischen Gitter.

Berechnen Sie die Heisenberg-Gleichung für den Impulsoperator $\hat{p}$. *(1 Punkt)*

c) Wo befinden sich die Minima des Potentials für die Fälle $\Delta > 0$ (blaue Verstimmung) und $\Delta < 0$ (rote Verstimmung) jeweils.
In welchen Abständen treten dementsprechend Minima auf? *(1 Punkt)*

d) Diskutieren Sie kurz, welche Annahme für die kinetische Energie getroffen werden muss, damit diese in a) vernachlässigt und die Position des Atoms als fest angenommen werden kann. *(1 Punkt)*

Aufgabe 3 *Purcell-Effekt*

Wir betrachten erneut die Wechselwirkung eines Atoms mit einem Strahlungsfeld, das in einem Volumen V quantisiert ist. Die Bewegung des Atoms wird vernachlässigt. Setzen Sie dazu o.B.d.A. $\mathbf{R} = 0$, sodass $\hat{\mathbf{A}}^{\perp}(\hat{\mathbf{R}}) \to \hat{\mathbf{A}} = \sum_\lambda \mathbf{A}_\lambda \hat{a}_\lambda + h.c.$ Der Hamiltonoperator lautet somit

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{rel}} + \hat{H}^{\perp}_{\text{emf}} + \hat{H}_{\text{int}} \tag{9}$$

mit den entsprechenden Definitionen aus Aufgabe 1.

a) Berechnen Sie gemäß der Vorlesung in erster Ordnung Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit für den Übergang $|e, \text{vac}\rangle \to |g, 1_\lambda\rangle$

$$P_\lambda(t) = |\langle g, 1_\lambda | U(t) | e, \text{vac}\rangle|^2, \tag{10}$$

indem Sie $\hat{H}_{\text{int}}$ als Störung betrachten. Dabei ist

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{rel}}|e\rangle &= \hbar\omega_e|e\rangle, \\ \hat{H}_{\text{rel}}|g\rangle &= 0. \end{aligned}$$

(2 Punkte)

b) Berechnen Sie daraus die entsprechende Übergangsrate $\Gamma_{\text{Purcell}} = \frac{\sum_\lambda P_\lambda(t)}{t}$.

Nehmen Sie hierzu im Kontinuumslimes an, dass

$$\sum_\lambda = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{e}\perp\mathbf{k}} \Rightarrow \frac{V}{8\pi^3} \int d\mathbf{k} \rho_0(k) \sum_{\mathbf{e}\perp\mathbf{k}} \tag{11}$$

wobei $\rho_0(k)$ mit $k = |\mathbf{k}|$ eine Zustandsdichte ist.

Wie steht Γ_{Purcell} mit der in der Vorlesung hergeleiteten Rate Γ in Zusammenhang? *(2 Punkte)*