

# Seminar zur Vorlesung Quantentheorie des Lichtes

SoSe 2012

Blatt 5

19. Juni

(Vorrechnen am 27. Juni)

## Aufgabe 1 *Thomson-Streuung*

Wir wollen den elastischen Streuquerschnitt für die Streuung eines Photons mit Wellenvektor  $\mathbf{k}$  und Polarisation  $\boldsymbol{\epsilon}$  an einem an ein Atom gebundenes Elektron berechnen. Dabei sei die Energie  $\hbar\omega$  des Photons viel größer als die Ionisierungsenergie  $E_I$  des Atoms,  $\hbar\omega \gg E_I$ , jedoch noch klein genug, dass die Näherung für lange Wellenlängen anwendbar ist. Das Atom ist im Koordinatenursprung lokalisiert, und das System Atom-Photon befindet sich anfangs im Zustand  $|\phi_i\rangle = |a; \mathbf{k}; \boldsymbol{\epsilon}\rangle$ , wobei mit  $|a\rangle$  der Grundzustand des Atoms bezeichnet wird, und  $|\mathbf{k}, \boldsymbol{\epsilon}\rangle$  den Zustand des elektromagnetischen Feldes bezeichnet, der gerade eine Anregung in der Mode mit Wellenvektor  $\mathbf{k}$  und Polarisation  $\boldsymbol{\epsilon}$  vorweist. Verwenden Sie den Wechselwirkungs-Hamiltonoperator in der Coulomb-Eichung

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hat{H}_{\text{int}}^{(1)} + \hat{H}_{\text{int}}^{(2)} \quad (1)$$

mit

$$\hat{H}_{\text{int}}^{(1)} = -\frac{e}{mc} \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{A}}^\perp, \quad (2)$$

$$\hat{H}_{\text{int}}^{(2)} = \frac{e^2}{2mc^2} \hat{\mathbf{A}}^\perp \cdot \hat{\mathbf{A}}^\perp, \quad (3)$$

$$(4)$$

wobei das Vektorpotential durch

$$\hat{\mathbf{A}}^\perp = \sum_\lambda \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_\lambda}} \mathbf{e}_\lambda (\hat{a}_\lambda + \hat{a}_\lambda^\dagger) \quad (5)$$

bei linearer (reeller) Polarisation  $\mathbf{e}_\lambda$  gegeben ist.

- a) Berechnen Sie jeweils bis in zweiter Ordnung in  $\frac{e}{c}$  den Beitrag von  $\hat{H}_{\text{int}}^{(1)}$  und  $\hat{H}_{\text{int}}^{(2)}$  zum Übergangsmatrixelement  $\mathcal{T}_{fi}$  zwischen dem Anfangszustand  $|\phi_i\rangle$  und dem Endzustand  $|\phi_f\rangle = |a; \mathbf{k}'; \boldsymbol{\epsilon}'\rangle$ . Weshalb gilt  $\omega' = \omega$ ? (3 Punkte)

$$\mathcal{T}_{fi}^{(1)} = \langle f | \hat{H}_{\text{int}}^{(1)} | i \rangle$$

$$\mathcal{T}_{fi}^{(2)} = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \sum_l \frac{\langle f | \hat{H}_{\text{int}}^{(1)} | l \rangle \langle l | \hat{H}_{\text{int}}^{(1)} | i \rangle}{E_i - E_l + i\eta}$$

- b) Bestimmen Sie, welcher der beiden Terme mehr Gewicht hat. Begründen Sie dazu, welche Matrixelemente einen Beitrag zu der Summe  $\mathcal{T}_{fi}^{(2)}$  geben und welche nicht, und nähern Sie geeignet mittels der Beziehung  $\hbar\omega \gg E_I$ . Um diese Näherung zu überprüfen, entwickeln Sie  $\mathcal{T}_{fi}^{(2)}$  in niedrigster Ordnung in  $(E_b - E_a)/\hbar\omega$ , wobei die Zustände  $|b\rangle$  eine Orthonormalbasis für die gebundenen und die Kontinuumszustände des Elektrons bilden. Geben Sie die Größenordnung der Skalierung zwischen den beiden Termen  $\mathcal{T}_{fi}^{(1)}$  und  $\mathcal{T}_{fi}^{(2)}$  als Funktion von  $E_I/\hbar\omega$  in dieser Näherung an. (2 Punkte)
- c) Für das gestreute Photon betrachten wir einen Raumwinkelbereich um den Wellenvektor  $\mathbf{k}'$  herum. Die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit und Raumwinkel  $\Omega'$  ist dann gegeben durch

$$\frac{\delta w_{fi}}{\delta\Omega'} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{T}_{fi}(E_f = E_i; \Omega'; \phi_i)|^2 \rho(E_f = E_i; \Omega'),$$

wobei  $\mathcal{T}_{fi}(E_f = E_i; \Omega'; \phi_i)$  das zuvor berechnete Übergangsmatrixelement und  $\rho(E_f = E_i; \Omega')$  die Dichte der Zustände in der Umgebung des Endzustandes ist. Leiten Sie daraus den differentiellen Streuquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = r_0^2 (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon}')^2$$

her, indem Sie den klassischen Elektronenradius  $r_0 = e^2/(mc^2)$  einsetzen und durch den Photonenfluß  $c/V$  dividieren. Bestimmen Sie den gesamten Streuquerschnitt durch Integration von  $(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon}')^2$  über alle Raumwinkel, und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit demjenigen, das in der klassischen Elektrodynamik für ein elastisch gebundenes Elektron erhalten wird. (3 Punkte)