Prof. Dr. Giovanna Morigi Stefan Schütz, Rick Dannert

Seminar zur Vorlesung Quantentheorie des Lichtes

SoSe 2012 **Blatt 6** **10. Juli**

(Vorrechnen am 17. Juli)

Aufgabe 1 *Anregung eines Atoms durch ein Wellenpaket: Breitband- und Schmalbandanregung*

Ein Atom im Grundzustand $|a\rangle$, das mit einem Photonen-Wellenpaket $|\psi_R\rangle$ wechselwirkt, kann dabei in den angeregten Zustand $|b\rangle$ übergehen. Der Hamiltonoperator des Systems besteht aus einem ungestörten Anteil H_0 und einer Kopplung H_{int}.

1) Zeigen Sie, dass das Matrixelement des Resolventen wie folgt angenähert werden kann,

$$\langle b; vac| \, G(E + \mathrm{i}\eta) \, |a; 1_\lambda\rangle \approx \frac{\langle b; vac| -\frac{e}{mc}\hat{\vec{p}} \cdot \hat{\vec{A}}^{\perp}(0) \, |a; 1_\lambda\rangle}{(E - \tilde{E}_b + \mathrm{i}\hbar[\Gamma_b/2]\,)(E + \mathrm{i}\eta - \tilde{E}_a - \hbar\omega)}\,, \tag{1}$$

wobei $\tilde{E}_i = E_i + \hbar\Delta_i$, $i = a, b$ und $\hbar\Delta_i$ die durch die Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld bewirkte Verschiebung der Energieniveaus ist (und η infinitesimal klein und positiv ist). *(4 Punkte)*

2) Sei zur Zeit $t = 0$ der Anfangszustand durch $|a; \lambda\rangle$ gegeben. Finden Sie mit Hilfe von Gleichung (1) die Wahrscheinlichkeitsamplitude $\langle b; vac| \, U(t) \, |a; \lambda\rangle$ dafür, dass sich das System zur Zeit t im Zustand $|b; vac\rangle$ befinden wird. *(2 Punkte)*

Sei nun der Anfangszustand des Feldes ein Ein-Photonen-Wellenpaket gegeben durch $|\psi_R\rangle = \int d\,k \; g(k - k_1) \, |\lambda\rangle$, wobei $\vec{k}_1$ der mittlere Wellenvektor ist, und die Integration nur Zustände miteinbezieht, die die gleiche Polarisation $\vec{\epsilon}$ und die gleiche Ausbreitungsrichtung $\vec{\kappa} = \vec{k}/k$ haben. Dabei sei die zentrale Frequenz des Wellenpaketes resonant mit der atomaren Übergangsfrequenz, $\omega_1 = ck_1 = \tilde{\omega}_{ba} = (\tilde{E}_b - \tilde{E}_a)/\hbar$.

3) Bestimmen Sie die Übergangsamplitude $\langle b; vac| \, U(t) \, |a; \psi_R\rangle = U_{ba}(t)$. Vernachlässigen Sie dabei die Abhängigkeit der Matrixelemente $\langle b; vac| -\frac{e}{mc}\hat{\vec{p}} \cdot \hat{\vec{A}}^{\perp}(0) \, |a; \lambda\rangle$ von k. *(2 Punkte)*

Sei $f(t) = \int d\omega g(k) e^{-\mathrm{i}\omega t}$ die Fouriertransformierte von $g(k)$. Diese Funktion habe ihr Maximum bei $t = t_0$ und eine Halbwertsbreite (FWHM) von Δt. Der Zeitnullpunkt $t = 0$ sei dabei ausreichend vor dem Eintreffen des Wellenpakets am Ort des Atoms gewählt, also $t_0 \gg \Delta t, \Gamma_b^{-1}$.

4) Zeigen Sie, dass die Übergangsamplitude $U_{ba}(t)$ proportional zur Faltung von $f(t)$ mit der Fouriertransformierten von $-[\omega + \mathrm{i}(\Gamma_b/2)]^{-1}$ ist. *(2 Punkte)*

5) Im Falle von Schmalbandanregung ist für $|g(k)|$ die Breite $\Delta k \ll \Gamma_b$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, das Atom im Zustand b zu finden, adiabatisch der Zeitentwicklung der einfallenden Intensität $|f(t)|^2$ folgt. *(2 Punkte)*

6) Zeigen Sie, dass für den Fall $\Delta t \ll \Gamma_b^{-1}$ die Wahrscheinlichkeit, das Atom im Zustand b zu finden, gegeben ist durch eine Kurve, deren Anstiegszeit in der Größenordnung von Δt liegt, und deren Abfallzeit gleich Γ_b^{-1} ist. *(2 Punkte)*