Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik III für LAG
(Quantenmechanik und Statistische Physik)

SS 2013 **Blatt 10** **21.06.2013**

Aufgabe 1 *Dichteoperatoren von reinen Zuständen und Gemischen*

Welche der folgenden Operatoren stellen einen akzeptierten Dichteoperator dar? Beschreiben sie einen reinen Zustand oder ein Gemisch? Finden Sie den Zustandsvektor im Fall eines reinen Zustandes.

$$\hat{W}_1 = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 3/4 \end{pmatrix}, \quad \hat{W}_2 = \begin{pmatrix} 9/25 & 12/25 \\ 12/25 & 16/25 \end{pmatrix},$$

$$\hat{W}_3 = \tfrac{1}{3}\left|u\right\rangle\left\langle u\right| + \tfrac{2}{3}\left|v\right\rangle\left\langle v\right| + \tfrac{\sqrt{2}}{3}\left|u\right\rangle\left\langle v\right| + \tfrac{\sqrt{2}}{3}\left|v\right\rangle\left\langle u\right|, \quad \text{mit } \langle u|u\rangle = \langle v|v\rangle = 1 \text{ und } \langle u|v\rangle = 0,$$

$$\hat{W}_4 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{W}_5 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

(2 Punkte)

Aufgabe 2 *von Neumann-Gleichung*

Aus der Vorlesung kennen Sie die von Neumann-Gleichung für den Dichteoperator:

$$\imath\hbar\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = \left[\hat{H}, \hat{\rho}(t)\right] \quad .$$

Stellen Sie den Dichteoperator in der Basis der Energieeigenzustände dar und verifizieren Sie die Gültigkeit der von Neuman-Gleichung. *(2 Punkte)*

Aufgabe 3 *Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen im Magnetfeld*

Wir betrachten ein Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen mit magnetischem Moment $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \gamma\hat{\mathbf{S}}$ in einem homogenen Magnetfeld $\mathbf{B}$, welches in z-Richtung zeigt. Der Hamiltonoperator dieses Systems lautet:

$$\hat{H} = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B} = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z$$

mit der Larmor-Frequenz $\omega_0 = \gamma B_0$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich das System in einem Eigenzustand des Operators $\hat{\sigma}_x$, welcher in der Eigenbasis des $\hat{\sigma}_z$-Operators durch

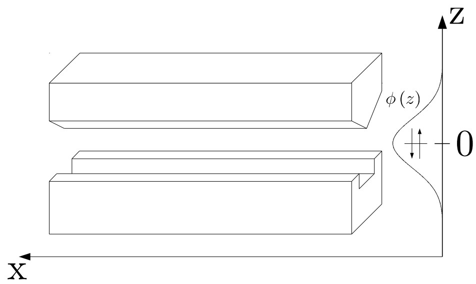
$$\left|+\right\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|+\right\rangle + \left|-\right\rangle\right)$$

dargestellt wird. Wie lautet der Zustand des Systems für einen Zeitpunkt $t > 0$? Berechnen Sie den zugehörigen Dichteoperator. Diskutieren Sie das Verhalten der Nebendiagonalelemente.

(2 Punkte)

Aufgabe 4 *Reprise: Der Stern-Gerlach-Versuch*

Wir betrachten einen Strahl von Spin-$1/2$-Teilchen, die eine Stern-Gerlach-Apparatur durchfliegen. Als äußeren Freiheitsgrad untersuchen wir ihre z-Koordinate. Weiterhin haben die Teilchen einen inneren Freiheitsgrad, den Spin. Die Bewegung in x-Richtung kann klassisch beschrieben werden und erfolgt mit konstanter Geschwindigkeit, wohingegen die Bewegung in z-Richtung quantenmechanisch betrachtet wird. Der Ortsanteil der Wellenfunktion lässt sich durch ein Gaußpaket beschreiben. Für die Rechnung ist dies irrelevant. Für das Magnetfeld im Innern der Stern-Gerlach-Apparatur verwenden wir in der x-z-Ebene die Näherung $\boldsymbol{B} = (B_0 + \beta z)\, \boldsymbol{e}_z$.



a) Erläutern Sie, warum der Hamiltonoperator des Systems durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_z^2}{2m} - \mu_B g_S \left(B_0 + \beta \hat{z}\right) \hat{S}_z$$

gegeben ist. *(1 Punkt)*

b) Bestimmen Sie formal die Zeitentwicklung des Systems, welches sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle + |-\rangle\right) |\phi\rangle$$

befindet. Hierbei ist $|\phi\rangle$ der Ortsanteil des Zustandes und $|+\rangle\,, |-\rangle$ sind die Eigenzustände von $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_z$. Die Zeitentwicklung des Ortsanteils ist sehr aufwendig und soll hier nicht explizit durchgeführt werden. Sie sollen nur eine formale Zeitentwicklung durchführen! Falls Sie Interesse an der Zeitentwicklung des Ortsanteils haben, besuchen Sie das Tutorium! *(1 Punkt)*

c) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle \hat{z}(t) \rangle$ und die Standardabweichung $\Delta z(t)$ von $\hat{z}$ für den Plus- bzw. Minusstrahl. Zur Berechnung sollen Sie die Erwartungswerte der Heisenbergschen Bewegungsgleichungen verwenden. Dabei sind folgende Erwartungswerte zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben:

$$\langle \hat{z}(t=0) \rangle = \langle \hat{p}_z(t=0) \rangle = 0 \quad , \quad \langle \hat{z}(t=0)\hat{p}_z(t=0) \rangle = \frac{\imath\hbar}{2} \quad ,$$
$$\langle \hat{z}^2(t=0) \rangle = z_0^2 \quad , \quad \langle \hat{p}_z^2(t=0) \rangle = {p_{0,z}}^2 \quad .$$

Diskutieren Sie die Ergebnisse! Wann kann der Überlapp zwischen den Wellenpaketen von Plus- und Minusstrahl vernachlässigt werden? *(4 Punkte)*

d) Berechnen Sie den Dichteoperator $\hat{\rho}(t)$. Berechnen Sie anschließend die Teilspur über den Ortsanteil und diskutieren Sie, in welchen Fällen der reduzierte Dichteoperator einen reinen Zustand bzw. ein Gemisch repräsentiert. Nutzen Sie die Ergebnisse von Teil d) für Ihre Argumentation. *(2 Punkte)*