Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik III für LAG
(Quantenmechanik und Statistische Physik)

SS 2013 **Blatt 11** **28.06.2013**

Aufgabe 1 *Dichteoperator eines Spin-1/2-Systems*

Wir betrachten ein Spin-1/2-System. Das System befinde sich mit Wahrscheinlichkeit p_i im Zustand $|\psi_i\rangle$ $(i = 1, 2)$ mit

$$|\psi_1\rangle = |+\rangle \qquad , p_1 = \tfrac{3}{4} \quad ,$$
$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right) \qquad , p_2 = \tfrac{1}{4} \quad .$$

a) Geben Sie den Dichteoperator $\hat{\rho}$ des Systems sowohl in der Dirac-Schreibweise als auch in Matrixgestalt an. Nutzen Sie als Basis die Eigenbasis von $\hat{\sigma}_z$. *(1 Punkt)*

b) Bestimmen Sie die Basis, in der $\hat{\rho}$ diagonal ist, in Termen von $|+\rangle$ und $|-\rangle$ und geben Sie für jeden Zustand der Diagonalbasis die Wahrscheinlichkeiten an, das System in ihm vorzufinden. *(1 Punkt)*

Aufgabe 2 *Dichteoperators eines gemischten Systems*

Zeigen Sie, dass für einen Dichteoperator, der einen gemischten Zustand beschreibt, gilt:

$$Tr\left(\hat{\rho}^2\right) < 1 \quad .$$

(1 Punkt)

Aufgabe 3 *Volumen der n-dimensionalen Kugel*

Das Volumen der n-dimensionalen Kugel mit Radius R lässt sich über das Integral

$$V_n\left(R\right) = \int dV_n = \underbrace{\int dx_1 \ldots \int dx_n}_{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = R^2}$$

bestimmen, wobei dV_n das n-dimensionale Volumenelement in sphärischen Kugelkoordinaten bezeichnet und R den Radius der n-dimensionalen Kugel darstellt.

a) Zeigen Sie anhand des obigen Integrals, dass

$$V_n\left(R\right) = V_n\left(1\right) R^n$$

gilt, wobei $V_n\left(1\right)$ das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel ist. *(1 Punkt)*

b) Geben Sie mithilfe der Gleichung aus Aufgabenteil a) das Volumenelement dV_n in Abhängigkeit von $V_n(1)$ an. Wie kann aus dV_n das Volumen V_n berechnet werden und welche Bedeutung hat dabei der von R unabhängige Anteil? *(1 Punkt)*

c) Um nun konkret $V_n(1)$ zu bestimmen, berechnen Sie das Integral

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_n \, e^{-\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)}$$

einmal in kartesischen Koordinaten und einmal in Kugelkoordinaten und drücken Sie $V_n(1)$ mithilfe der Gammafunktion $\Gamma(x) = \int\limits_0^{\infty} dt \, e^{-t} \, t^{x-1}$ aus. *(2 Punkte)*

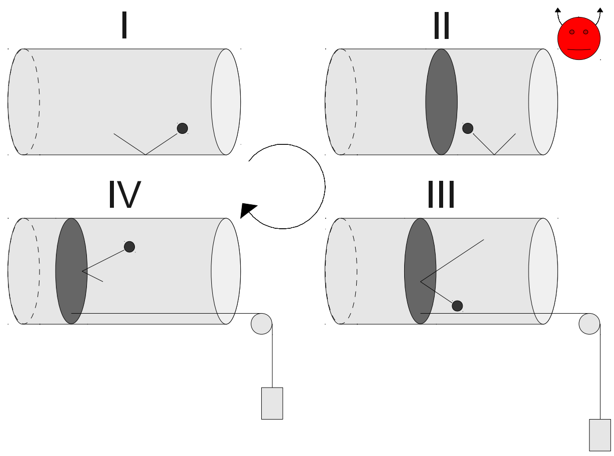
d) Zeigen Sie nun, dass für das Volumen der n-dimensionalen Kugel

$$V_n(R) = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\Gamma\left(n/2+1\right)}$$

gilt, wobei $n/2\, \Gamma\left(n/2\right) = \Gamma\left(n/2+1\right)$ ist. *(2 Punkte)*

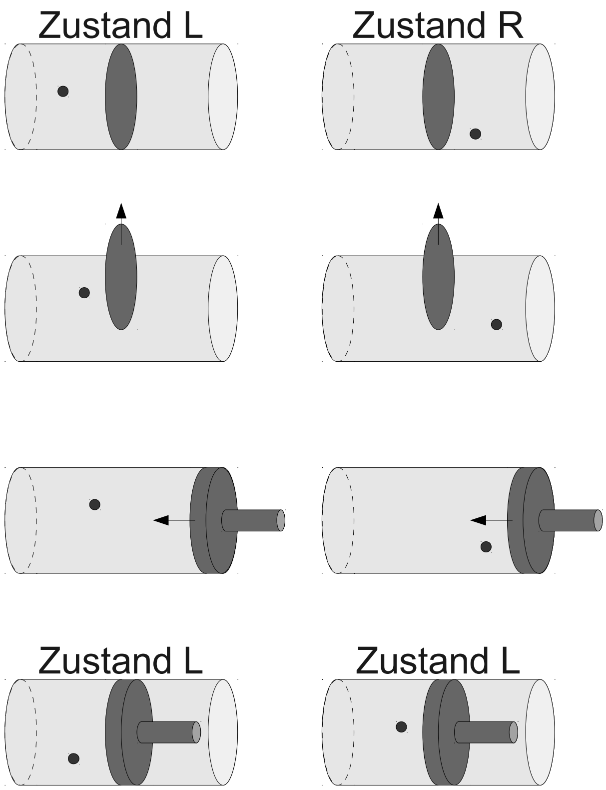
Aufgabe 4 *Szilard-Motor*

1929 stellte der ungarische Physiker Leo Szilard eine klassische, nichtquantenmechanische Analyse des Maxwellschen Dämons vor, indem er als Gedankenexperiment einen idealisierten Wärmemotor mit einem einzelnen Gasmolekül postulierte. Das Gasmolekül befindet sich in einer Box mit Volumen V (I). Im ersten Schritt des Prozesses wird eine dünne, masselose adiabatische Trennwand in die Box eingeführt, die das Volumen V in zwei gleiche Teile unterteilt. Nun bestimmt der Maxwellsche Dämon, in welchem Teilvolumen sich das Gasmolekül befindet und merkt sich das Resultat (II). Anschließend befestigt er an der Seite der Trennwand, auf der sich das Teilchen befindet, ein Gewicht. Indem die Kammer durch ein äußeres Wärmereservoir auf einer konstanten Temperatur T gehalten wird, erreicht der Dämon, dass das Gasmolekül durch quasistatische isotherme Expansion die Arbeit W verrichtet (III). Das Gas kehrt in seinen ursprünglichen Zustand zurück, wenn sich die Trennwand bis zum Ende der Box verschoben hat und es wieder das gesamte Volumen V ausfüllt (IV). Während der Expansion wird die Wärme Q aus dem Reservoir entnommen, wobei $W = Q$ gilt, da der Prozess isotherm erfolgt. Ein Arbeitszyklus der Maschine besteht somit darin, die Wärmeenergie Q in die gleiche Menge mechanischer Arbeit W umzuwandeln.



a) Berechnen Sie die Arbeit W, die durch das Gasmolekül verrichtet wird.
Hinweis: Sie können das Gas als ideales Gas betrachten und die ideale Gasgleichung $pV = Nk_BT$ verwenden. *(1 Punkt)*

Offensichtlich verletzt der Dämon das zweite Gesetz der Thermodynamik, da die Wärme Q perfekt in mechanische Arbeit W umgewandelt und die Entropie des Wärmebades um $S = Q/T$ verringert wird. Um die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes zu bewahren, muss auch die Entropie des Vorganges betrachtet werden. Der Dämon speichert das Bit Information über die Position des Gasmoleküls in seinem Gedächtnis. Durch die Bestimmung der Position des Gasmoleküls wird die Entropie erhöht. Diese Entropieerhöhung steckt in der Information über die Position des Gasmoleküls. Um die Entropieerhöhung zu berechnen, betrachten wir das Gedächtnis des Dämons ebenfalls als Box mit einem Gasmolekül. Um die im Gedächtnis gespeicherte Information zu löschen, muss das System in einen Zustand gebracht werden, in dem sich das Gasmolekül unabhängig von dem Ergebnis der ersten Messung des Dämons mit Wahrscheinlichkeit 1 in einer bestimmten Hälfte des Volumens befindet. Zu diesem Zweck wird ein Kolben an einer Seite der Box eingeführt und bis zur Mitte des Volumens verschoben. Die hierfür erforderliche mechanische Arbeit entspricht der Arbeit, die zur Löschung der Information über die ursprünglichen Position des Teilchens erforderlich ist.



b) Berechnen Sie die Arbeit W, die zur Löschung der Information erforderlich ist, und vergleichen Sie sie mit Ihrem Ergebnis aus Aufgabenteil a). *(2 Punkte)*