

Übungen zur Vorlesung

Theoretische Physik III für LAG

(Quantenmechanik und Statistische Physik)

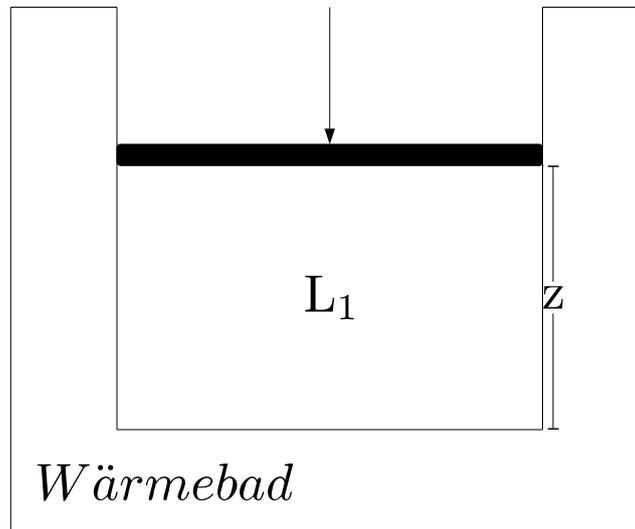
SS 2013

Blatt 12

05.07.2013

Aufgabe 1 *Neue Gesamtheit*

Es lässt sich eine Gesamtheit konstruieren, bei der eine Makronebenbedingung an die mittlere Energie $U = \sum_{i,z} p_{i,z} E_{i,z}$ und das mittlere Volumen $\langle V \rangle = \sum_{i,z} p_{i,z} V_z$ gestellt wird, wobei die Teilchenzahl N als Mikronebenbedingung behandelt wird. Die Summe über i ist dabei als Summe über alle Energieeigenwerte und die Summe über z als Summe über alle Volumina zu verstehen. Konkret lässt sich diese Gesamtheit dadurch realisieren, dass ein Gas in einem Zylinder (System L_1) mit beweglichem Stempel eingeschlossen wird. Dieser Zylinder ist umgeben von einem Wärmebad und kann sein Volumen an die außen herrschenden Verhältnisse anpassen.



- a) Zeigen Sie durch Maximierung der Entropie, dass die Wahrscheinlichkeit $p_{i,z}$ als

$$p_{i,z} = \frac{1}{Z} \exp \{-\beta E_{i,z} - \gamma V_z\}$$

geschrieben werden kann, und berechnen Sie die Zustandssumme Z . Dabei sind β und γ Konstanten. (2 Punkte)

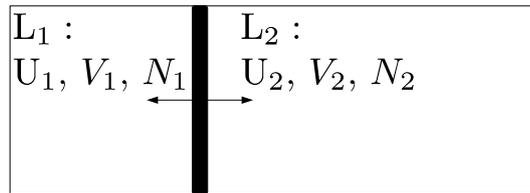
- b) Berechnen Sie die Entropie S und drücken Sie diese durch die Temperatur T , U und $\langle V \rangle$ aus, indem Sie $\beta = \frac{1}{k_B T}$ und $\gamma = \beta \gamma'$ definieren. (1 Punkt)
- c) Zeigen Sie, dass das thermodynamische Potential $G = G(T, \gamma', N) = -k_B T \ln Z$ (hier auch freie Enthalpie genannt) die Form $G = U + \gamma' \langle V \rangle - TS$ besitzt. (1 Punkt)
- d) Bilden Sie das totale Differential dG und zeigen Sie damit, dass

$$\gamma' = - \left(\frac{\partial U}{\partial \langle V \rangle} \right)_{S,N}$$

gilt. Warum kann γ' nun als Druck p interpretiert werden?

(2 Punkte)

- e) Betrachten Sie nun die Ankopplung zweier Systeme L_1 und L_2 , die durch einen verschiebbaren Stempel getrennt sind. Dabei erlaubt der Stempel einen Energieaustausch zwischen den beiden Systemen und das Gesamtsystem ist abgeschlossen.



Zeigen Sie, dass im thermischen Gleichgewicht die Gleichgewichtsbedingungen $T_1 = T_2$ und $p_1 = p_2$ gelten, wobei p_1 und p_2 die beiden Drücke des Systems L_1 bzw. L_2 sind. (2 Punkte)

Aufgabe 2 Die Entropie und der Dichteoperator

Zeigen Sie, dass zwischen der Entropie S und dem Dichteoperator $\hat{\rho}$ der Zusammenhang

$$S = -k_B \langle \ln(\hat{\rho}) \rangle = -k_B \sum_i p_i \ln(p_i)$$

besteht. Wie groß ist die Entropie, wenn $\hat{\rho}$ einen reinen Zustand beschreibt? (1 Punkt)