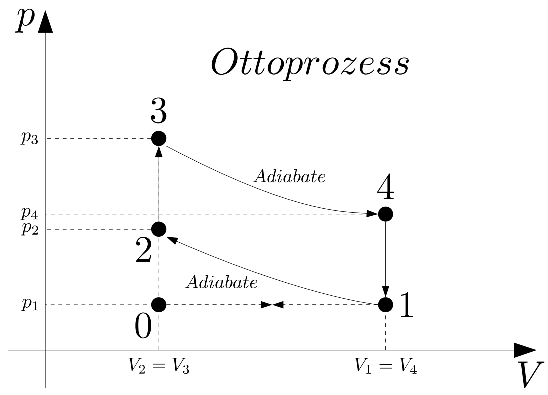
Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik III für LAG
(Quantenmechanik und Statistische Physik)

SS 2013 | **Blatt 13** | **12.07.2013**

Aufgabe 1 *Ottoprozess*

Wir betrachten den in der nachfolgenden Skizze dargestellten Ottoprozess für ein ideales Gas.



a) Benennen Sie für jedes Teilstück des Kreisprozesses den stattfindenden physikalischen Vorgang und beschreiben Sie kurz, was auf dem jeweiligen Teilstück in einem realen Verbrennungsmotor geschieht. Weshalb heißt der Ottoprozess auch Gleichraumprozess? *(2 Punkte)*

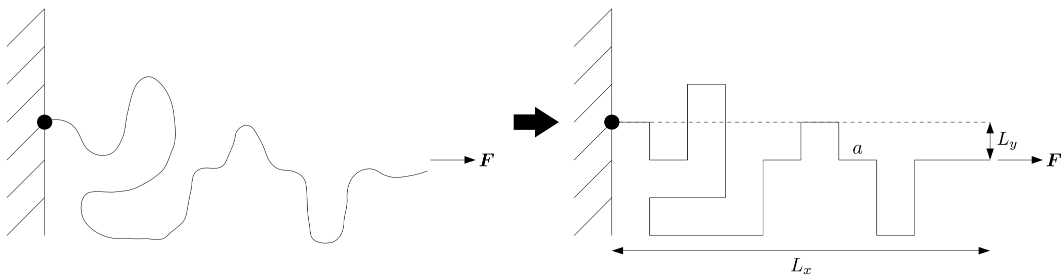
b) Bestimmen Sie für die Teilstücke $(1 \to 2)$, $(2 \to 3)$, $(3 \to 4)$ und $(4 \to 1)$ des Ottoprozesses die verrichtete Arbeit ΔW_{ij} sowie die zu- bzw. abgeführte Wärmemenge ΔQ_{ij}. *(2 Punkte)*

c) Geben Sie die während eines Durchlaufs $(1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1)$ geleistete Gesamtarbeit ΔW an und bestimmen Sie den thermischen Wirkungsgrad $\eta_{th\,Otto}$ des Ottoprozesses in Abhängigkeit vom Verdichtungsverhältnis $\varepsilon := \frac{V_1}{V_2}$ und dem Isentropenexponent $\kappa := \frac{c_p}{c_V}$. Wie wirkt sich eine Erhöhung des Verdichtungsverhältnisses auf den Wirkungsgrad aus? *(2 Punkte)*

d) Vergleichen Sie den Wirkungsgrad des Ottoprozesses mit dem Wirkungsgrad des Carnotprozesses. Weshalb kann beim Ottoprozess nicht der Wirkungsgrad des Carnotprozesses erreicht werden? *(2 Punkte)*

Aufgabe 2 *Polymer im einschränkenden Potential*

Wir betrachten ein Polymer der Länge L, welches an einem Ende befestigt ist und auf welches eine Kraft $\boldsymbol{F}$ wirke (siehe linke Abbildung). Unser Ziel ist die Herleitung eines Ausdruckes für das Elastizitätsmodul des Polymers. Zu diesem Zweck diskretisieren wir das Polymer in N Segmente der Länge $a := \frac{L}{N}$, die entweder in positive bzw. negative x-Richtung oder in positive bzw. negative y-Richtung orientiert sind (siehe rechte Abbildung). Die Anzahl der jeweiligen Segmente werde mit N_x^+, N_x^-, N_y^+ und N_y^- bezeichnet. Dabei nehmen wir an, dass die Energie eines vertikalen Segmentes im einschränkenden Potential ε betrage, während die horizontalen Segmente keinen Energiebeitrag leisten. L_x bezeichnet die Länge des Polymers in x-Richtung, L_y die Auslenkung des freien Endes in Bezug auf das feste Ende. Die Gesamtenergie des Polymers im einschränkenden Potential beträgt U. Wir normieren L_x und L_y auf die Länge eines Segmentes gemäß $L_x' := \frac{L_x}{a}$ und $L_y' := \frac{L_y}{a}$ sowie die innere Energie U des Polymers auf die Energie ε eines vertikalen Segmentes gemäß $U' := \frac{U}{\varepsilon}$. Mit der Identifikation $V \to L$ und $p \to \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ Spannung) können wir das Polymer mit dem für das mikrokanonische Ensemble des idealen Gases hergeleiteten Formalismus beschreiben.



a) Drücken Sie N, L_x', L_y' und U' in Termen von N_x^+, N_x^-, N_y^+ und N_y^- aus und lösen Sie die Ausdrücke anschließend nach N_x^+, N_x^-, N_y^+ und N_y^- auf. *(3 Punkte)*

b) Geben Sie die Anzahl der Mikrozustände $\Omega\left(U, L_x, L_y, N\right)$ des Systems als Funktion von N_x^+, N_x^-, N_y^+ und N_y^- an und nutzen Sie dieses Ergebnis, um die Entropie $S\left(U', L_x', L_y', N\right)$ des Polymers zu berechnen.
Hinweis: Verwenden Sie die Stirlingformel: $\ln(x!) \approx x\ln(x) - x$ *(2 Punkte)*

In Analogie zum mikrokanonischen Ensemble des idealen Gases, für das $\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{p}{T}$ gilt, erhalten wir für das vorliegende Polymer $\frac{\partial S}{\partial L_x} = -\frac{\mathcal{T}_x}{T}$ und $\frac{\partial S}{\partial L_y} = -\frac{\mathcal{T}_y}{T}$. Weiterhin gilt $\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}$.

c) Berechnen Sie $\frac{\partial S}{\partial L_x}$, $\frac{\partial S}{\partial L_y}$ und $\frac{\partial S}{\partial U}$. Was folgt für L_y', wenn $\mathcal{T}_y = 0$ gilt? *(3 Punkte)*

d) Wir nehmen nun $\mathcal{T}_y = 0$ an. Leiten Sie aus $\frac{\partial S}{\partial L_x}$ die mechanische Zustandsgleichung $e^{-2\mathcal{T}_x a/k_B T} = \ldots$ und aus $\frac{\partial S}{\partial U}$ die thermische Zustandsgleichung $e^{2\varepsilon/k_B T} = \ldots$ des Systems her. Nutzen Sie anschließend diese Gleichungen, um einen von U' unabhängigen Ausdruck für $\frac{L_x'}{N}$ zu finden. Erläutern Sie, weshalb von einem während der Rechnung auftretenden $\pm$ lediglich das positive Vorzeichen physikalisch relevant ist. *(2 Punkte)*

e) Das Elastizitätsmodul des Polymers in x-Richtung ist gegeben durch $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial L_x}{\partial \mathcal{T}_x}\right)_T$. Führen Sie für den Ausdruck für $\frac{L_x'}{N}$ im Fall $\mathcal{T}_x a \ll k_B T$ eine Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung in $\mathcal{T}_x a$ durch. Lösen Sie den Ausdruck der Taylorentwicklung nach L_x auf und berechnen Sie das Elastizitätsmodul des Polymers. *(2 Punkte)*