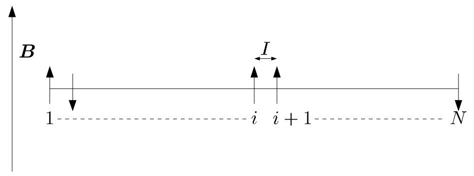
Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik III für LAG
(Quantenmechanik und Statistische Physik)

SS 2013 **Blatt 14** **19.07.2013**

Aufgabe 1 *Das eindimensionale Isingmodell*

Das einfachste Modell für wechselwirkende magnetische Momente μ, die sich in einem homogenen Magnetfeld $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e_z}$ befinden, ist das Isingmodell. Es beschreibt ein System aus N Spins, die in einer eindimensionalen Kette im gleichen Abstand zueinander angeordnet sind. Weiterhin besteht eine Wechselwirkung zwischen den Spins, die als so kurzreichweitig angenommen wird, dass sie nur zwischen nächsten Nachbarn betrachtet werden muss.



Der Hamiltonoperator des Systems lautet

$$\hat{H} = -\mu B \sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_i - I \sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_{i+1} \quad .$$

Hierbei bezeichnet der Index i die Position des magnetischen Momentes innerhalb der Kette, $\hat{\sigma}_i$ ist der Spinoperator in z-Richtung an der Position i mit den Eigenwerten ± 1 und I gibt die Stärke der Wechselwirkung zwischen benachbarten Spins an. Des Weiteren werden periodische Randbedingungen angenommen, d. h. $\hat{\sigma}_{N+1} = \hat{\sigma}_1$.

a) Interpretieren Sie zunächst die einzelnen Terme des Hamiltonoperators und machen Sie sich klar, welche Energie jeder einzelne Spin haben kann, wenn es keine Wechselwirkung zwischen den Spins gibt. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie die Zustandssumme $\mathcal{Z}$ in der kanonischen Gesamtheit und zeigen Sie, dass diese auch in der Form

$$\mathcal{Z} = Tr\left\{P^N\right\}$$

geschrieben werden kann, wobei

$$P = \begin{pmatrix} e^{\frac{I+\mu B}{k_B T}} & e^{-\frac{I}{k_B T}} \\ e^{-\frac{I}{k_B T}} & e^{\frac{I-\mu B}{k_B T}} \end{pmatrix}$$

ist. *(3 Punkte)*

c) Bringen Sie die Matrix P auf Diagonalform und zeigen Sie, dass dann die Zustandssumme als

$$\mathcal{Z} = \lambda_1^N + \lambda_2^N$$

geschrieben werden kann, wobei λ_1 und λ_2 die Eigenwerte von P sind. *(1 Punkt)*

d) Bestimmen Sie nun die Eigenwerte und diskutieren Sie, welcher der beiden Eigenwerte den größeren Betrag hat. (Dies kann für die Grenzwertbetrachtung in f) hilfreich sein.) *(2 Punkte)*

e) Zeigen Sie, dass das gesamte mittlere magnetische Moment $M = \mu \left\langle \sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_i \right\rangle$ durch

$$M = -\left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)_{T,N}$$

gegeben ist, wobei $F = -k_B T \ln(\mathcal{Z})$ die freie Energie ist. *(1 Punkt)*

f) Berechnen Sie mit der in e) gefundenen Beziehung das mittlere magnetische Moment pro Spin $m = \frac{M}{N}$ im Grenzfall $N \to \infty$ und skizzieren Sie diese Größe als Funktion von $x = \frac{\mu B}{k_B T}$ für verschiedene Werte von $y = \frac{I}{k_B T}$. *(1 Punkt)*