Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik III für LAG
(Quantenmechanik und Statistische Physik)

SS 2013 **Blatt 2** **26.04.2013**

Aufgabe 1 *Messungen stören das System*

An einem System werden nacheinander drei Observable A, B, und C gemessen, wobei die Messung von A das Resultat a' liefere und die Messung von C das Resultat c'.

a) Zeigen Sie, dass es einen Unterschied macht, ob die Messung von B tatsächlich ausgeführt und anschließend mit allen möglichen Resultaten die Messung von C vorgenommen wird oder die Messung von B ausgelassen und direkt mit der Messung von C fortgefahren wird, d. h. zeigen Sie:

$$p\left(a', b, c'\right) \neq p\left(a', 1, c'\right).$$

(1 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass die Einführung eines Phasenfaktors

$$\left|b'\right\rangle \left\langle b'\right| \to \left|b'\right\rangle e^{\imath\varphi(b')} \left\langle b'\right|$$

$p\left(a', 1, c'\right)$ verändert, jedoch keinen Einfluss auf $p\left(a', b, c'\right)$ hat. *(1 Punkt)*

c) Begründen Sie, dass eine zufällige Verteilung von $\varphi\left(b'\right)$ dazu führt, dass $p\left(a', 1, c'\right)$ zu $p\left(a', b, c'\right)$ übergeht. *(1 Punkt)*

Aufgabe 2 *Algebra der Pauli-Operatoren*

In der Vorlesung haben Sie die Pauli-Operatoren kennen gelernt:

$$\sigma_x = \left|+\right\rangle \left\langle -\right| + \left|-\right\rangle \left\langle +\right| \quad , \quad \sigma_y = \imath \left|-\right\rangle \left\langle +\right| - \imath \left|+\right\rangle \left\langle -\right| \quad , \quad \sigma_z = \left|+\right\rangle \left\langle +\right| - \left|-\right\rangle \left\langle -\right| \quad .$$

a) Zeigen Sie, dass die Pauli-Operatoren der folgenden Algebra genügen:

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + \imath \sum_k \epsilon_{ijk} \sigma_k \quad .$$

Folgern Sie daraus, dass die Pauli-Operatoren die Dirac-Algebra

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} := \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}$$

erfüllen und dass die Operatoren $S_i := \sigma_i/2$, $i = x, y, z$ der Drehimpulsalgebra

$$[S_i, S_j] := S_i S_j - S_j S_i = \imath \sum_k \epsilon_{ijk} S_k$$

genügen.
Zeigen Sie weiterhin, dass

$$\sigma_x \sigma_y \sigma_z = \imath$$

gilt und dies unter zyklischer Vertauschung der Indizes erhalten bleibt. *(2 Punkte)*

b) Wir führen nun den Pauli-Vektor $\boldsymbol{\sigma}$ ein, der die Pauli-Operatoren als Einträge enthält. Zeigen Sie, dass der Pauli-Vektor der folgenden Relation genügt:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \imath \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \quad ,$$

wobei $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ zwei Vektoren sind.
Nutzen Sie dies, um für einen normierten Vektor $\boldsymbol{n}$ zu zeigen, dass gilt:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n})^2 = 1 \quad .$$

(1 Punkt)

Aufgabe 3 *Gymnastik mit Kets, Bras und Operatoren*

a) Beweisen Sie folgende Identität:

$$[|a_1\rangle \langle a_1| + |a_2\rangle \langle a_2|]^2 = |a_1\rangle \langle a_1| + |a_2\rangle \langle a_2| \,, \quad a_1 \neq a_2 \quad .$$

a_1 und a_2 sind dabei verschiedene Messergebnisse zur Messgröße A. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie den Kommutator

$$[|a_1\rangle \langle a_2| \,, |a_3\rangle \langle a_4|] \quad .$$

(1 Punkt)

c) Wir definieren Bra und Ket neu durch $\langle \overline{a_i}| := \lambda(a_i) \langle a_i|$ und $|\overline{a_j}\rangle := |a_j\rangle [\lambda(a_j)]^{-1}$, $\lambda(a_i) \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Beziehung

$$\langle \overline{a_1} | \overline{a_2} \rangle = \delta(a_1, a_2)$$

weiterhin gilt. Überprüfen Sie außerdem die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{a_1} |\overline{a_1}\rangle \langle \overline{a_1}| = \mathbb{1} \quad .$$

Analoge Zusammenhänge gelten für $\langle b_1|$ und $|b_2\rangle$ mit $\lambda(b_i)$. Welche Bedingungen müssen an $\lambda(a_1)$ und $\lambda(b_1)$ gestellt werden, damit

$$\langle \overline{b_1} | \overline{a_1} \rangle = \langle \overline{a_1} | \overline{b_1} \rangle^*$$

gilt? Nutzen Sie diese Bedingung, um zu argumentieren, dass $\langle a_1|b_1\rangle$ keine Wahrscheinlichkeit sein kann, während

$$\langle a_1|b_1\rangle \langle b_1|a_1\rangle$$

tatsächlich eine ist. *(2 Punkte)*

Aufgabe 4 *Kommutatorrelationen*

a) Prüfen Sie die Kommutatoridentität

$$[X, YZ] = Y[X, Z] + [X, Y]Z \quad .$$

Wie lautet die analoge Beziehung für $[XY, Z]$? Was impliziert der Satz „Der Kommutator $[X, Y]$ ist linear in X und Y für den Kommutator $[X_1 + X_2, Y_1 + Y_2]$.“? *(1 Punkt)*

b) Überprüfen Sie

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z[X, Y]] = 0 \quad .$$

Welche Aussage für dreidimensionale Vektoren folgt aus der Wahl

$$X = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{e_x}, Y = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{e_y}, Z = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{e_z} \quad ?$$

Überprüfen Sie diese. *(1 Punkt)*