Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik III für LAG
(Quantenmechanik und Statistische Physik)

SS 2013 **Blatt 3** **03.05.2013**

Aufgabe 1 *Gekoppelte Stern-Gerlach-Apparaturen*

Ziel dieser Aufgabe ist die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten für das Detektieren von Silberatomen, die mehrere Stern-Gerlach-Apparaturen nacheinander durchlaufen haben.
Drehungen um eine beliebige Achse $\boldsymbol{n}$ ($|\boldsymbol{n}| = 1$) um den Winkel Θ werden durch den Drehoperator $\hat{D} = \exp\left(\frac{-\imath(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{n})\Theta}{2}\right)$ beschrieben, wobei $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ der Paulivektor ist. Es gilt die Relation $\hat{D} = \exp\left(\frac{-\imath(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{n})\Theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) - \imath\,(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{n})\sin\left(\frac{\Theta}{2}\right)$.

a) Beim Durchlaufen der ersten Stern-Gerlach-Apparatur (SGA) wird nur der Plusstrahl ($|+\rangle$) entlang der z-Achse akzeptiert und der Minusstrahl ausgeblendet. Nun durchlaufen die Silberatome eine zweite SGA, die Atome in der x-z-Ebene detektiert, wobei die Messrichtung gegenüber der z-Achse um den Winkel Θ gedreht ist. Welche Messwerte sind bei dieser Messung möglich? Bestimmen Sie die zugehörigen Zustände nach der Messung. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsamplituden und die Wahrscheinlichkeiten der Messergebnisse. Die Wahrscheinlichkeit, den Plusstrahl hinter der ersten SGA zu detektieren, sei auf Eins normiert. *(2 Punkte)*

b) Wir betrachten nun eine neue Anordnung. Die Silberatome durchlaufen zuerst eine SGA, die den Plusstrahl entlang der z-Achse selektiert. Danach durchläuft der Strahl eine SGA, die in die (beliebige) Raumrichtung $\boldsymbol{n}$ zeigt. Wir selektieren den Plusstrahl der zweiten SGA und blenden den Minusstrahl aus. Der Plusstrahl durchläuft nun eine dritte SGA, die Silberatome in der ursprünglichen Richtung entlang der z-Achse detektiert. Hier messen wir nun den Minusstrahl. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsamplitude und die Intensität des detektierten Strahls. Unter welchen Einstellungen von $\boldsymbol{n}$ wird die Intensität des detektierten Strahls maximal? *(2 Punkte)*

Aufgabe 2 *Zusammenhang Drehungen $\leftrightarrow$ unitäre Transformationen*
Es sei $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ der Pauli-Vektor und $\boldsymbol{n}$ ein normierter Vektor.

a) Drücken Sie $\boldsymbol{n}$ in Kugelkoordinaten aus und berechnen Sie $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}$. Formen Sie Ihr Resultat dergestalt um, dass $\hat{\sigma}_y$ in dem Ausdruck nicht mehr auftaucht, und sortieren Sie die auftretenden Terme nach Termen, die $\hat{\sigma}_x$ enthalten, und Termen ohne $\hat{\sigma}_x$. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie $e^{\pm\imath(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{\nu})\alpha} = \cos(\alpha) \pm \imath(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu})\sin(\alpha)$ für einen normierten Vektor $\boldsymbol{\nu}$. Nutzen Sie anschließend diese Relation, um das Ergebnis aus Aufgabenteil a) auf die Form $e^{-\imath\hat{\sigma}_z\varphi}\hat{\sigma}_x \sin(\vartheta) + \hat{\sigma}_z \cos(\vartheta)$ zu bringen. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie für einen hermiteschen Operator $\hat{\mathcal{O}}$ und $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$, dass $e^{\imath\mu_1\hat{\mathcal{O}}}e^{\imath\mu_2\hat{\mathcal{O}}} = e^{\imath(\mu_1+\mu_2)\hat{\mathcal{O}}}$ gilt, indem Sie die Spektraldarstellung analytischer Funktionen hermitescher Operatoren verwenden. Nutzen Sie anschließend diese Relation, um $e^{-\imath\hat{\sigma}_z\varphi}\hat{\sigma}_x = e^{-\imath\hat{\sigma}_z\frac{\varphi}{2}}\hat{\sigma}_x e^{\imath\hat{\sigma}_z\frac{\varphi}{2}}$ und $\hat{\sigma}_z = e^{-\imath\hat{\sigma}_z\frac{\varphi}{2}}\hat{\sigma}_z e^{\imath\hat{\sigma}_z\frac{\varphi}{2}}$ zu zeigen. *(1 Punkt)*

d) Mit den Ergebnissen aus Aufgabenteil c) können Sie $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}$ umformen auf die Gestalt $e^{-\imath\hat{\sigma}_z\frac{\varphi}{2}}\left(\hat{\sigma}_z \cos(\vartheta) + \hat{\sigma}_x \sin(\vartheta)\right)e^{\imath\hat{\sigma}_z\frac{\varphi}{2}}$. Dieser Term kann analog zu dem bisherigen Vorgehen weiter umgeschrieben werden. Erläutern Sie dies kurz, indem Sie angeben, welche Entsprechungen bestehen, und geben Sie das Ergebnis der Umformung direkt an. *(1 Punkt)*

e) Zeigen Sie abschließend, dass $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}$ geschrieben werden kann als $\hat{U}^{-1}\hat{\sigma}_z\hat{U}$ mit $\hat{U} := e^{\imath\hat{\sigma}_y\frac{\vartheta}{2}}e^{\imath\hat{\sigma}_z\frac{\varphi}{2}}$ und begründen Sie, dass für einen Eigenzustand $|m_n\rangle$ von $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}$ gilt $|m_n\rangle = \hat{U}^{-1}|m_z\rangle$, wenn $|m_z\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{\sigma}_z$ ist. *(1 Punkt)*

Hinweis: Nutzen Sie zur Bearbeitung dieser Aufgabe die Relationen, die Sie in Aufgabe 2 auf dem zweiten Übungsblatt gezeigt haben.