

# Übungen zur Vorlesung Theoretische Physik III für LAG (Quantenmechanik und Statistische Physik)

SS 2013

Blatt 4

10.05.2013

## Aufgabe 1 *Alternativer Stern-Gerlach-Versuch*

In dieser Aufgabe betrachten wir ein Experiment, das ähnlich wie der Stern-Gerlach-Versuch funktioniert. Wir wollen nun annehmen, dass nach der Stern-Gerlach-Anordnung drei anstatt zwei Strahlen auf den Schirm treffen. Außer dem Plus- und dem Minusstrahl gibt es noch einen dritten Nullstrahl. Verschiedene Überlegungen aus der Vorlesung sollen in dieser Aufgabe nun für ein 3-Niveausystem (3 unterschiedliche physikalische Messwerte) nachvollzogen werden, also für eine Observable, die 3 Messergebnisse liefern kann.

- Konstruieren Sie analog zur Vorlesung die Messsymbole, welche zu den einzelnen Messergebnissen gehören. Was bedeutet hier die Addition von zwei Messsymbolen? Wie lautet die Vollständigkeitsrelation für diesen Versuchsaufbau? *(1 Punkt)*
- Nehmen Sie nun an, dass mehrere dieser Stern-Gerlach-Anordnungen hintereinander aufgebaut werden. Zeigen Sie, dass die Reihenfolge der Messungen eine Rolle spielt bzw. dass die Messreihenfolge prinzipiell nicht vertauscht werden kann. Argumentieren Sie außerdem, dass die Orthogonalitätsrelation  $\langle a_1 | a_2 \rangle = \delta_{a_1, a_2}$  gilt, wobei  $a_1, a_2 \in \{+, 0, -\}$ . Welche physikalische Bedeutung steht hinter dieser Aussage? *(1 Punkt)*
- Zeigen Sie allgemein, dass für eine Observable  $\hat{B}$  mit  $n$  Messwerten  $b_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) gilt:

$$\prod_{k=1}^n (\hat{B} - b_k) = 0 \quad .$$

Verwenden Sie zum Beweis die Spektraldarstellung von  $\hat{B}$ . Nutzen Sie diese Relation anschließend, um eine algebraische Gleichung für die Observable  $\hat{\sigma}_z$  mit den Messwerten  $+, 0, -$  herzuleiten. *(2 Punkte)*

- Zeigen Sie, dass

$$\delta(\hat{B}, b') = \prod_{b''(\neq b')} \left( \frac{\hat{B} - b''}{b' - b''} \right) = |b'\rangle \langle b'|$$

gilt. Nutzen Sie diese Relation, um die Messsymbole in Abhängigkeit von  $\hat{\sigma}_z$  zu berechnen. Prüfen Sie anschließend nach, dass es sich tatsächlich um Projektoren handelt. Verwenden Sie dazu die algebraische Beziehung aus der vorherigen Teilaufgabe. *(2 Punkte)*

## **Aufgabe 2**     *Quanten-Zeno-Effekt*

Betrachten Sie den folgenden Versuchsaufbau: Eine initiale Stern-Gerlach-Apparatur (SGA) selektiert den „+“-Strahl. Dieser SGA folgen  $n$  weitere SGA, die wiederum den „+“-Strahl selektieren. Dabei ist jede SGA um einen Winkel  $\varepsilon$  weiter gegenüber der initialen SGA gedreht, sodass die finale Messung des „+“-Strahls unter dem Winkel  $\theta = n\varepsilon$  relativ zur ursprüngliche Orientierung erfolgt. Welcher Anteil des initialen Strahls passiert die finale SGA? Betrachten Sie nun für einen festen Winkel  $\theta$  den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$ , sodass  $n = \theta/\varepsilon \rightarrow \infty$ . Welcher Anteil des initialen Strahls passiert in diesem Limes die finale SGA? Berechnen Sie für  $\theta = \pi/2$  und  $n = 1, 2, 3, 5, 10, 15, 45, 90, 180, 360$  konkret die Intensität des Strahls hinter der finalen SGA, um sich den Effekt vor Augen zu führen. *(2 Punkte)*