Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik III für LAG
(Quantenmechanik und Statistische Physik)

SS 2013 **Blatt 5** **17.05.2013**

Aufgabe 1 *Orts- und Impulsmessung*

Zum Zeitpunkt der Untersuchung sei ein *freies* Teilchen der Masse m in einer räumlichen Dimension durch den Zustand $|\varphi\rangle$ gegeben. Die zugehörige Wellenfunktion in Ortsdarstellung lautet

$$\varphi(x) := \langle x|\varphi\rangle = N\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}+\frac{ip_0 x}{\hbar}} \quad , \tag{$*$}$$

wobei N die Normierungskonstante ist.

a) Bestimmen Sie N so, dass $\varphi(x)$ auf 1 normiert ist.
Hinweis: Gauß-Integral: $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp(-\alpha x^2) = \sqrt{\pi/\alpha}$ *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie, dass die Impulsdarstellung des Teilchens im Zustand $|\varphi\rangle$ gegeben ist durch

$$\widetilde{\varphi}\,(p) = \sqrt{\frac{\sigma}{\hbar\sqrt{\pi}}}\exp\left(\frac{-\left(p-p_0\right)^2\sigma^2}{2\hbar^2}\right) \quad .$$

(2 Punkte)

c) Für eine gegebene normierte Wellenfunktion in der Impulsdarstellung, $\widetilde{\psi}(p)$, ist die Wahrscheinlichkeitsdichte im Impulsraum definiert als $\rho_p(p) = |\widetilde{\psi}(p)|^2 = \widetilde{\psi}^*(p)\widetilde{\psi}(p)$. Beweisen Sie die Gültigkeit der folgenden Relation:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp\, p\rho_p(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x)\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) \quad ,$$

wobei $\psi(x)$ die inverse Fourier-Transformierte ist und der Wellenfunktion in der Ortsdarstellung entspricht. *(2 Punkte)*

d) Kehren wir zur Wellenfunktion $\varphi(x)$ in $(*)$ zurück. Berechnen Sie $\langle\hat{p}\rangle$ und $\langle\hat{p}^2\rangle$ für das Teilchen im Zustand φ. Bestimmen Sie ferner den Erwartungswert der Energie. *(1 Punkt)*

e) Vergleichen Sie $\varphi(x)$ mit den Eigenzuständen des Ortsoperators $\hat{x}$ in der Ortsbasis. Diskutieren Sie ausführlich den Grenzübergang $\sigma \to 0$. *(1 Punkt)*

Aufgabe 2 *Spezielle Ortsmessung*

Wir betrachten nun die Wellenfunktion $\varphi(x) = \langle x|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

a) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion normiert ist. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie, dass die Erwartungswerte $\langle\hat{x}\rangle$ und $\langle\hat{x}^2\rangle$ für diese Wellenfunktion nicht existieren. *(2 Punkte)*

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zwischen x_1 und x_2 anzutreffen.
(1 Punkt)

Aufgabe 3 *Ortseigenfunktion im Impulsraum*

a) Leiten Sie aus der Eigenwertgleichung des Ortsoperators die Eigenzustände des Ortsoperators im Impulsraum her.
Hinweis: Multiplizieren Sie die Eigenwertgleichung von links mit $\langle p|$ und lösen Sie die sich ergebende DGL! *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie ausgehend von der Eigenwertgleichung des Ortsoperators

$$\hat{x}\varphi_x(x_0) = x_0\varphi_x(x_0)$$

die Eigenfunktion $\varphi_x(x_0)$ im Ortsraum. Führen Sie eine Fourier-Transformation der Eigenfunktion im Impulsraum durch und vergleichen Sie das Ergebnis mit $\varphi_x(x_0)$. *(1 Punkt)*

Aufgabe 4 *Wellenpakete minimaler Unschärfe*

In der Vorlesung wurde die Unschärferelation $\Delta q \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2}$ hergeleitet. Formulieren Sie die Bedingungen für das Gleichheitszeichen in der Unschärferelation als eine Differentialgleichung. Bestimmen Sie deren Lösung, welche die Wellenfunktion mit minimaler Unschärfe im q-Raum darstellt. Schließen Sie mithilfe von Aufgabe 1 b) auf die Wellenfunktion im k-Raum und skizzieren Sie sowohl Realteil als auch Betrag der Wellenfunktionen im q- und im k-Raum.
(2 Punkte)