Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik III für LAG
(Quantenmechanik und Statistische Physik)

SS 2013 **Blatt 6** **24.05.2013**

Aufgabe 1 *Zeitentwicklung des Gaußpaketes*

Ein freies Teilchen der Masse m befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|\psi(t=0)\rangle$.

a) Stellen Sie die stationäre Schrödingergleichung auf und lösen Sie sie in der Basis der Impulseigenzustände. *(1 Punkt)*

b) Nutzen Sie den Zeitentwicklungsoperator, um zu zeigen, dass

$$|\psi(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t}\, \psi(p, t=0)\, |p\rangle \quad ,$$

wobei $\psi(p, t=0) = \langle p|\psi(t=0)\rangle$ ist. *(1 Punkt)*

c) Als Anfangsbedingung wählen wir, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Wellenfunktion dem Gaußpaket aus Aufgabe 4 von Blatt 5 entspricht:

$$\psi(x, t=0) = (2\pi)^{-1/4} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}\, e^{-\frac{[x-\langle\hat{x}\rangle]^2}{4\Delta x^2}}\, e^{\frac{i}{\hbar}\langle\hat{p}\rangle(x-\langle\hat{x}\rangle)} \quad .$$

Die Impulsdarstellung dieser Wellenfunktion lautet:

$$\psi(p, t=0) = (2\pi)^{-1/4} \frac{1}{\sqrt{\Delta p}}\, e^{-\frac{[p-\langle\hat{p}\rangle]^2}{4\Delta p^2}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\langle\hat{x}\rangle p} \quad .$$

Berechnen Sie die Ortswellenfunktion $\psi(x,t) = \langle x|\psi(t)\rangle$ zum Zeitpunkt t. Nutzen Sie dabei die Abkürzung $\langle\hat{x}(t)\rangle := \langle\hat{x}\rangle + \frac{\langle\hat{p}\rangle t}{m}$. *(2 Punkte)*

d) Verwenden Sie $\Delta x(t) := \sqrt{\Delta x^2 + \frac{t^2}{m^2}\Delta p^2}$, um die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x,t)|^2$ zu berechnen. *(1 Punkt)*

e) Skizzieren Sie $|\psi(x,t)|^2$ und $|\psi(p,t)|^2$ für $t = 0$ und $t > 0$. Vergleichen Sie $\langle\hat{x}(t)\rangle$ mit einem klassischen freien Teilchen. Wie entwickelt sich die Breite des Wellenpaketes? Geben Sie für sehr kleine und sehr große Zeiten die führende Ordnung der zeitlichen Entwicklung der Breite an. Zeigen Sie, dass die Unschärferelation $\Delta x(t) \cdot \Delta p(t) \geq \frac{\hbar}{2}$ erfüllt ist. *(2 Punkte)*