Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik III für LAG
(Quantenmechanik und Statistische Physik)

SS 2013 **Blatt 8** **07.06.2013**

Aufgabe 1 *Harmonischer Oszillator*

In der Vorlesung haben Sie den harmonischen Oszillator kennen gelernt. Seine stationäre Schrödingergleichung lautet in Ortsdarstellung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi_n(x)+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi_n(x)=E_n\psi_n(x) \quad .$$

Die Eigenzustände des harmonischen Oszillators, die sich als Lösungen dieser Differentialgleichung ergeben, sind die Hermite-Funktionen:

$$\psi_n(x)=\sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \quad , \quad n=0,1,2\ldots$$

mit den Hermite-Polynomen:

$$H_n(y)=(-1)^n e^{y^2}\frac{d^n}{dy^n}\left(e^{-y^2}\right) \quad .$$

a) Untersuchen Sie die Hermite-Funktionen auf Punkt- bzw. Achsensymmetrie bzgl. des Ursprunges. *(1 Punkt)*

b) Wir betrachten nun den halbierten harmonischen Oszillator:

$$V(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}m\omega^2x^2 & \text{, falls } x\geq 0\\ \infty & \text{, falls } x<0\end{cases} \quad .$$

Nutzen Sie die Symmetrieüberlegungen aus Aufgabenteil a) sowie die Randbedingungen des Problems, um die Eigenzustände in Ortsdarstellung direkt anzugeben. *(1 Punkt)*

c) Nun betrachten wir einen harmonischen Oszillator, bei dem sich an der Stelle $x=0$ ein Deltapotential befindet:

$$V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2+\delta(x) \quad .$$

Welche Eigenzustände des harmonischen Oszillators ohne Deltapotential sind weiterhin Eigenzustände des harmonischen Oszillators mit Deltapotential? *(1 Punkt)*

Aufgabe 2 *Operatoridentitäten*

Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ lineare Operatoren. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

a)

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\hat{A},\hat{B}]_n}{n!}$$

mit $[\hat{A},\hat{B}]_n = [\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]_{n-1}]$ und $[\hat{A},\hat{B}]_0 = \hat{B}$.
Hinweis: Definieren Sie $\hat{F}(\lambda) \equiv e^{\lambda\hat{A}}\hat{B}e^{-\lambda\hat{A}}$ und führen Sie für diese Funktion eine Taylorentwicklung um $\lambda = 0$ aus. *(1 Punkt)*

b)

$$\begin{aligned} e^{\hat{A}+\hat{B}} &= e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2} \quad , \\ e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} &= e^{\hat{B}}e^{\hat{A}}e^{[\hat{A},\hat{B}]} \end{aligned}$$

mit $[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] = 0$ und $[\hat{B},[\hat{B},\hat{A}]] = 0$. *(2 Punkte)*

c) Zeigen Sie: Der Kommutator zweier linearer Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ verschwindet genau dann, wenn sie eine gemeinsame Eigenbasis besitzen. *(2 Punkte)*

Aufgabe 3 *Superposition kohärenter Zustände des harmonischen Oszillators*

Wir betrachten einen harmonischen Oszillator, der zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|\psi\rangle = N(|\alpha\rangle + |0\rangle)$ präpariert ist. $|\psi\rangle$ ist eine Superposition aus einem beliebigen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ und dem Vakuumzustand $|0\rangle$.

a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante N. *(1 Punkt)*

b) Führen Sie die Zeitentwicklung von $|\psi\rangle$ durch. *(1 Punkt)*

c) Berechnen Sie analog zur Vorlesung Erwartungswert und Varianz von Orts- und Impulsoperator im Zustand $|\psi\rangle$ und nutzen Sie diese Informationen, um das Phasenraumdiagramm für $\langle\hat{x}\rangle$ und $\langle\hat{p}\rangle$ zu zeichnen. Tragen Sie in dieses auch Δx und Δp ein. *(3 Punkte)*