Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik III für LAG
(Quantenmechanik und Statistische Physik)

SS 2013 **Blatt 9** **14.06.2013**

Aufgabe 1 *Kommutatoren des Drehimpulsoperators*

a) Berechnen Sie die Kommutatoren von $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ mit den Leiteroperatoren:

$$\left[\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{L}_\pm\right] \quad , \quad \left[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm\right] \quad .$$

(1 Punkt)

b) Berechnen Sie das Produkt $\hat{L}_\pm \hat{L}_\mp$ der Leiteroperatoren und nutzen Sie Ihr Ergebnis, um den Kommutator $\left[\hat{L}_+, \hat{L}_-\right]$ anzugeben. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie, dass sowohl das Quadrat des Drehimpulsoperators als auch jede seiner Komponenten mit einem zentralsymmetrischen Hamiltonoperator kommutiert. *(1 Punkt)*

Aufgabe 2 *Der quantenmechanische Kreisel*

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m, welches in einem festen Abstand r um einen Punkt rotiert. Das System wird durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{L}}^2}{2mr^2}$$

beschrieben, wobei $\hat{\boldsymbol{L}}$ ein Drehimpulsoperator ist. Da der Radius fest ist, ist die Wellenfunktion $\psi(\theta, \varphi)$ nur vom Polarwinkel $\theta \in [0, \pi]$ und dem Azimutwinkel $\varphi \in [0, 2\pi]$ abhängig.

a) Welche Energien können gemessen werden und wie sehen die Energieeigenzustände aus? Skizzieren Sie zudem die Energieniveaus mit den zugehörigen Energien und geben Sie den Entartungsgrad sowie die Energiedifferenz zwischen benachbarten Energieniveaus an. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{\boldsymbol{L}}^2 \rangle$, $\langle \hat{L}_z \rangle$ und $\langle \hat{L}_x \rangle$ für

- die Energieeigenzustände $|l = 1, m = -1\rangle$, $|l = 1, m = 1\rangle$ und $|l = 2, m = 0\rangle$,
- den Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|l = 1, m = 1\rangle + |l = 1, m = -1\rangle\right)$.

(2 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(0 \leq \theta \leq \pi/4;\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$, das Teilchen im Raumbereich $0 \leq \theta \leq \pi/4;\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ zu finden, wenn es entweder im Energieeigenzustand $|l = 1, m = 0\rangle$ oder $|l = 2, m = -2\rangle$ präpariert wurde. *(1 Punkt)*

d) Das System befinde sich nun zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|l = 1, m = 1\rangle + |l = 1, m = -1\rangle + |l = 2, m = 0\rangle \right) \quad .$$

Berechnen Sie die Zeitentwicklung von $|\alpha\rangle$ für $t > 0$. Bestimmen Sie weiterhin die Wahrscheinlichkeit $P\,(0 \leq \theta \leq \pi/2;\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2, t)$, das Teilchen zum Zeitpunkt t im Raumbereich $0 \leq \theta \leq \pi/2;\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2$ anzutreffen. *(2 Punkte)*