Seminar zur Vorlesung
TPV: Fortgeschrittene Quantenmechanik

SoSe 2013 **Übungsblatt 1** **16.04.2013**

Aufgabe 1 *Rabioszillationen eines Spins im Magnetfeld*

Ein Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen befindet sich in einem Magnetfeld B_z entlang der z-Richtung, welches die Energieniveaus der Spin-up und Spin-down Zustände $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ aufspaltet. Dies wird durch den folgenden Hamiltonoperator beschrieben:

$$\hat{H}_0 = gB_z\hat{S}_z = \frac{\hbar\omega_0}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|)\,. \tag{1}$$

Dabei ist g die gyromagnetische Konstante und $\hat{S}_z$ ist die Projektion des Gesamtspins auf die z-Achse (zugleich die Quantisierungsachse).
Wir möchten nun das Teilchen als Quantenbit verwenden und seinen Zustand kontrollieren. Dazu steht uns nur ein Magnetfeld in x-Richtung zur Verfügung, das durch folgende Wechselwirkung beschrieben ist:

$$\hat{V} = gB_x\hat{S}_x = \frac{\hbar\omega_1}{2}(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|)\,. \tag{2}$$

a) Finden Sie die Zeitentwicklung der Wellenfunktion des Teilchens $|\psi(t)\rangle$ für den gegebenen Anfangszustand $|\psi(0)\rangle = |\downarrow\rangle$ für den gesamten Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$. Was ist die maximale Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Zustand $|\uparrow\rangle$ zu finden, d.h. den Spin zu "flippen"? Wie lang sollte die Wechselwirkung eingeschaltet sein, um diese Wahrscheinlichkeit zu erreichen? *(3 Punkte)*

b) Wir nehmen nun an, dass die Wechselwirkung $\hat{V}$ eine kleine Störung zu $\hat{H}_0$ ist. Finden Sie den Zeitentwicklungsoperator im Wechselwirkungsbild bis in erster Ordnung in $\hat{V}$. Benutzen Sie dazu die Dyson-Reihe

$$\tilde{\hat{U}} = 1 - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t dt_1 \tilde{\hat{V}}(t_1) + \left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\right)^2 \int_0^t dt_1 \tilde{\hat{V}}(t_1) \int_0^{t_1} dt_2 \tilde{\hat{V}}(t_2) + \cdots \tag{3}$$

mit der Störung im Wechselwirkungsbild $\tilde{\hat{V}}(t) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0 t}\hat{V}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0 t}$.

Benutzen Sie diese Näherung, um die Zeitentwicklung der Wellenfunktion im Schrödingerbild $|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0 t}\tilde{\hat{U}}|\psi(0)\rangle$ für den Anfangszustand $|\psi(0)\rangle = |\downarrow\rangle$ zu finden. *(2 Punkte)*

c) Vergleichen Sie das Ergebnis für die Wellenfunktion aus Teilaufgabe a) mit der genäherten aus b), indem Sie eine Taylorentwicklung für kurze Zeiten durchführen. Wie lauten die Bedingungen an ω_0 und ω_1, so dass der Unterschied zwischen der genäherten und der exakten Lösung vernachlässigbar klein ist? Auf welcher Zeitskala kann unter dieser Annahme die genäherte Lösung angewendet werden? *(2 Punkte)*

Aufgabe 2 *Harmonischer Oszillator*

Ein Teilchen in einem harmonischen Potential ist durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 \tag{4}$$

beschrieben, dessen Eigenenergien und Eigenzustände durch $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ bzw. $|n\rangle$ gegeben sind. Zwischen Orts- und Impulsoperator gilt folgende Kommutatorrelation: $[\hat{x}, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar$.

a) Finden Sie die Zeitentwicklung der Wellenfunktion unter der Annahme, dass das System sich anfänglich in einem kohärenten Zustand $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$ befindet, mit

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{5}$$

gegeben, wobei $\alpha = |\alpha|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ eine komplexe Zahl ist. Finden Sie die Zeitentwicklung der Erwartungswerte des Orts- und Impulsoperators, und zeigen Sie, dass diese mit der Frequenz ω schwingen. Drücken Sie dazu Orts- und Impulsoperator mit Hilfe der Erzeuger- und Vernichteroperatoren aus, d.h. $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ und $\hat{p} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$.

Hinweis: Benutzen Sie, dass die kohärenten Zustände Eigenzustände zum Vernichtungsoperator sind: $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$. *(2 Punkte)*

b) Betrachten Sie nun das quadratische Potential $\hat{V} = \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$ als eine kleine Störung des Hamiltonoperators $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ des freien Teilchens. Bestimmen Sie mit Hilfe der Dyson-Reihe (3) den Zeitentwicklungsoperator im Wechselwirkungsbild bis in erster Ordnung in $\tilde{\hat{V}}(t)$.

Hinweis: Die folgende Formel kann dabei hilfreich sein:

$$\mathrm{e}^{\hat{A}}\hat{B}\mathrm{e}^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{3!}[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \cdots \tag{6}$$

(2 Punkte)

c) Benutzen Sie den genäherten Zeitentwicklungsoperator um die Zeitenwicklung eines Eigenzustands des ungestörten Hamiltonoperators, gegeben durch $\hat{H}_0|p'\rangle = \frac{p'^2}{2m}|p'\rangle$, zu bestimmen. Lösen Sie das Problem in der Ortsdarstellung für den Anfangszustand $|p'\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \langle x|p'\rangle |x\rangle$,

$$\langle x|p'\rangle = \phi_{p'}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp(\mathrm{i}xp'/\hbar)\,. \tag{7}$$

Bestimmen Sie $\langle x|\psi(t)\rangle$. Finden Sie die Voraussetzungen, unter welchen die Störung nur eine kleine Korrektur zu der ungestörten Zeitentwicklung darstellt. *(2 Punkte)*