Seminar zur Vorlesung
TPV: Fortgeschrittene Konzepte der Quantenphysik

Prof. Dr. Giovanna Morigi

SoSe 2013 **Blatt 2** **23.04.2013**

Aufgabe 3 *Yukawa-Potential*

In der Vorlesung wurde ein freies klassisches skalares Feld besprochen, dessen Bewegungsgleichung eine lineare Wellengleichung erfüllt. Die entsprechende Lagrangedichte ist durch

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu} + \mu^2\phi^2\right) \tag{1}$$

gegeben, wobei $x_\nu = (x, y, z, \mathrm{i}ct)$ die Koordinaten in Vierervektor-Schreibweise sind. Die Wechselwirkung des Feldes mit einer Quelle kann durch einen zusätzlichen Term $\mathcal{L}_{\text{int}} = -\rho\phi$ in der Lagrangedichte berücksichtigt werden, wobei $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ eine skalare Quellendichte (analog zur Ladungsdichte in der Elektrostatik) ist.

a) Leiten Sie die Bewegungsgleichung für das Feld ϕ her. Zeigen Sie, dass diese invariant unter Lorentz-Transformationen ist. Bestimmen Sie die Hamilton'sche Dichte $\mathcal{H}_{\text{int}}$ der Wechselwirkung. *(1 Punkt)*

b) Die Quellendichte einer ruhenden punktförmigen Quelle am Ursprung sei durch $\rho = g\delta^{(3)}(\vec{r})$ gegeben, wobei die Konstante g die Kopplungsstärke zwischen Feld und Quelle ist (analog zur elektrischen Ladung e in der Elektrodynamik). Zeigen Sie, dass das zeitunabhängige Feld durch

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{g}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mu r}}{r} \tag{2}$$

gegeben ist. *(2 Punkte)*

Hinweis: Verwenden Sie die Fouriertransformation zur Lösung der Bewegungsgleichung. Nehmen Sie weiter an, dass $\nabla\phi$ und ϕ im Unendlichen hinreichend schnell gegen Null abfallen.

c) Im Pion-Austauschmodell sind die Nukleonen die Quellen des sogenannten Meson-Feldes aus Teilaufgabe b). Dessen Anregungen werden Pionen oder π-Mesonen genannt. Dies erlaubt eine qualitative Beschreibung der Wechselwirkung zwischen zwei Nukleonen unter Vernachlässigung von Spin und Ladung der Pionen.

Berechnen Sie die Wechselwirkungsenergie zwischen zwei Nukleonen an den Orten $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$. Bestimmen Sie zunächst die Hamilton'sche Dichte $\mathcal{H}_{\text{int}}$. Ist die Wechselwirkung attraktiv oder repulsiv? Was ergibt sich für $\mu = 0$? Vergleichen Sie dies mit der Coulomb-Wechselwirkung. *(2 Punkte)*

Aufgabe 4 *Lagrange-Dichte des Elektromagnetischen Feldes*

Die Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes kann durch

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{c} j_\alpha A_\alpha \tag{3}$$

beschrieben werden. Der Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ ist dabei durch

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\mathrm{i}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\mathrm{i}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\mathrm{i}E_3 \\ \mathrm{i}E_1 & \mathrm{i}E_2 & \mathrm{i}E_3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu \tag{4}$$

gegeben, und die Vierervektoren A_μ und j_μ durch

$$A_\nu = (\vec{A}, \mathrm{i}\phi) \qquad\qquad j_\mu = (\vec{j}, \mathrm{i}c\rho)\,. \tag{5}$$

a) Leiten Sie die Maxwellgleichungen

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\mu \tag{6}$$

mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen her. *(2 Punkte)*

b) Aus welcher Annahme folgen die restlichen Gleichungen,

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0\,? \tag{7}$$

(1 Punkt)