# Seminar zur Vorlesung
# TPV: Fortgeschrittene Konzepte der Quantenphysik

*Prof. Dr. Giovanna Morigi*

**SoSe 2013** **Blatt 3** **30.04.2013**

## Aufgabe 5 *Die Hamiltonfunktion des freien elektromagnetischen Feldes*

Das freie elektromagnetische Feld ist in der Coulomb-Eichung ($\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r},t)=0$) vollständig durch das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r},t)$ beschrieben, welches sich wie folgt zerlegen lässt:

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\sum_{\lambda} q_{\lambda}(t)\vec{A}_{\lambda}(\vec{r}). \tag{1}$$

Die Funktionen $\vec{A}_{\lambda}(\vec{r})$ sind in einem Würfel mit Volumen $V$ und Kantenlänge $L$ gegeben durch

$$\vec{A}_{\lambda}(\vec{r})=\sqrt{\frac{8\pi c^2}{L^3}}\vec{\varepsilon}_{\lambda}\begin{cases}\cos(\vec{k}_{\lambda}\cdot\vec{r})\\ \sin(\vec{k}_{\lambda}\cdot\vec{r})\end{cases}, \qquad \vec{k}_{\lambda}=\frac{2\pi}{L}(n_x,n_y,n_z), \tag{2}$$

mit $n_x, n_y \in \mathbb{Z}$ und $n_z > 0$ ganzzahlig, und zwei Polarisationen $\vec{\varepsilon}_{\lambda}=\vec{\varepsilon}_{\lambda}^{(1)},\vec{\varepsilon}_{\lambda}^{(2)}\perp\vec{k}_{\lambda}$. Zu jedem $\vec{k}_{\lambda}$ gibt es also vier linear unabhängige Moden $(\cos,\sin;\vec{\varepsilon}_{\lambda}^{(1)},\vec{\varepsilon}_{\lambda}^{(2)})$. Die $\vec{A}_{\lambda}(\vec{r})$ bilden dann eine vollständig orthogonale Basis, d.h. es gilt $\int_V \vec{A}_{\lambda}(\vec{r})\cdot\vec{A}_{\lambda'}(\vec{r})d^3r=\delta_{\lambda\lambda'}\mathcal{N}$, mit der Normierungskonstante $\mathcal{N}$. Für die $\vec{A}_{\lambda}(\vec{r})$ folgt direkt die Gleichung $\nabla\cdot\vec{A}_{\lambda}(\vec{r})=0$. Erfüllt das Vektorpotential die Wellengleichung mit periodischen Randbedingungen, so sind die Funktionen $\vec{A}_{\lambda}(\vec{r})$ zudem Lösungen der Gleichung

$$\nabla^2\vec{A}_{\lambda}(\vec{r})+\frac{\omega_{\lambda}^2}{c^2}\vec{A}_{\lambda}(\vec{r})=0. \tag{3}$$

a) Schreiben Sie die Hamiltonsche Dichte des freien elektromagnetischen Feldes $\mathcal{H}(\vec{r},t)=\frac{1}{8\pi}(|\vec{E}(\vec{r},t)|^2+|\vec{B}(\vec{r},t)|^2)$ mit Hilfe der Funktionen $q_{\lambda}(t)$ und $\vec{A}_{\lambda}(\vec{r})$.

*(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie, dass die Hamiltonfunktion des Feldes $H=\int_V\mathcal{H}(\vec{r},t)d^3r$ als Summe harmonischer Oszillatoren geschrieben werden kann:

$$H=\sum_{\lambda}\left(\frac{1}{2}p_{\lambda}^2+\frac{1}{2}\omega_{\lambda}^2q_{\lambda}^2\right). \tag{4}$$

*Hinweis:* Benutzen Sie, um die Hamiltonfunktion herzuleiten, folgende Relation

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}))=(\nabla\times\vec{A})\cdot(\nabla\times\vec{B})-\vec{A}\cdot(\nabla\times(\nabla\times\vec{B})), \tag{5}$$

sowie den Satz von Gauß-Ostrogradski (auch als gaußscher Integralsatz bekannt) und periodische Randbedingungen,

$$\vec{A}_{\lambda}(x,y,z)=\vec{A}_{\lambda}(x+L,y,z)=\vec{A}_{\lambda}(x,y+L,z)=\vec{A}_{\lambda}(x,y,z+L).$$

*(3 Punkte)*

## **Aufgabe 6** *Vakuumfluktuationen*

In der Coulomb-Eichung ist das freie quantisierte elektrische Feld in der Zerlegung in ebene Wellen gegeben durch:

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r}) = \sum_{\lambda} \mathrm{i}\, \mathcal{E}_\lambda \vec{\epsilon}_\lambda \left[\hat{a}_\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}_\lambda \cdot \vec{r}} - \hat{a}_\lambda^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}_\lambda \cdot \vec{r}}\right] , \tag{6}$$

mit $\mathcal{E}_\lambda = \sqrt{2\pi\hbar\omega_\lambda/V}$ (in Gaußschen cgs-Einheiten). $V$ ist das Quantisierungsvolumen und $\lambda = (\vec{k}_\lambda, \vec{\epsilon}_\lambda)$ der Modenindex. Der Erwartungswert des elektrischen Feldes im Vakuumzustand verschwindet für jeden beliebigen Punkt $\vec{r}$,

$$\langle 0|\hat{\vec{E}}(\vec{r})|0\rangle = 0\,. \tag{7}$$

a) Zeigen Sie, dass die Varianz des elektrischen Feldes im Vakuumzustand im Punkt $\vec{r}$ divergiert.

   *Hinweis:* Gehen Sie für ein unendlich großes Quantisierungsvolumen zum Kontinuumslimes über:

$$\sum_{\vec{k}_\lambda} \longrightarrow \frac{V}{(2\pi)^3}\int_V d^3k. \tag{8}$$

*(1 Punkt)*

b) Die Varianz bleibt jedoch endlich, wenn man über ein begrenztes Volumen mittelt. Bestimmen Sie das gemittelte Feld wie folgt

$$\overline{\hat{\vec{E}}} = \int_V d^3R\, f(\vec{R})\hat{\vec{E}}(\vec{r}+\vec{R}) \tag{9}$$

   mit Hilfe einer normierten Funktion $f(\vec{R})$,

$$\int_V d^3R\, f(\vec{R}) = 1\,, \tag{10}$$

   die die Gewichtung des charakteristischen Volumens angibt. Die Fourier-Transformation der Funktion $f(\vec{R})$ ist gegeben durch

$$g(\vec{k}) = \int_V d^3R\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{R}} f(\vec{R})\,. \tag{11}$$

   Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des gemittelten Feldes für den Vakuumzustand. Berechnen Sie dies dann explizit, indem Sie für $f(\vec{R})$ eine Gauß-Funktion

$$f(\vec{R}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\vec{R}^2}{2\sigma^2}\right\}$$

   annehmen.

*(3 Punkte)*