Seminar zur Vorlesung
TPV: Fortgeschrittene Konzepte der Quantenphysik

Prof. Dr. Giovanna Morigi

SoSe 2013 **Blatt 4** **03.05.2013**

Aufgabe 7 *Impuls des elektromagnetischen Feldes*

Das freie elektromagnetische Feld in der Basis ebener Wellen ist in der Coulomb-Eichung durch

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r}) = \sum_\lambda \mathrm{i}\,\mathcal{E}_\lambda \vec{\epsilon}_\lambda \left[\hat{a}_\lambda e^{\mathrm{i}\vec{k}_\lambda\cdot\vec{r}} - \hat{a}_\lambda^\dagger e^{-\mathrm{i}\vec{k}_\lambda\cdot\vec{r}}\right] \tag{1}$$

$$\hat{\vec{B}}(\vec{r}) = \sum_\lambda \mathrm{i}\,\mathcal{B}_\lambda \left(\frac{\vec{k}_\lambda}{|\vec{k}_\lambda|} \times \vec{\epsilon}_\lambda\right) \left[\hat{a}_\lambda e^{\mathrm{i}\vec{k}_\lambda\cdot\vec{r}} - \hat{a}_\lambda^\dagger e^{-\mathrm{i}\vec{k}_\lambda\cdot\vec{r}}\right] \tag{2}$$

gegeben, wobei $\mathcal{B}_\lambda = \mathcal{E}_\lambda = \sqrt{2\pi\hbar\omega_\lambda/V}$ (im Gaußschen CGS-System), und $\lambda = (\vec{k}_\lambda, \vec{\epsilon}_\lambda)$ ist. Zeigen Sie, dass der Impuls des elektromagnetischen Feldes

$$\hat{\vec{P}} = \frac{1}{4\pi c}\int_V \left(\hat{\vec{E}} \times \hat{\vec{B}}\right) d^3x \tag{3}$$

mit Hilfe der Erzeuger- und Vernichteroperatoren als

$$\hat{\vec{P}} = \sum_\lambda \hbar\vec{k}_\lambda\, \hat{a}_\lambda^\dagger \hat{a}_\lambda \tag{4}$$

geschrieben werden kann. *(3 Punkte)*

Aufgabe 8 *Spin des Photons*

Der Zustand eines Photons ist bestimmt durch den Wellenvektor $\vec{k}$ und den Polarisationsvektor beschrieben in der Basis $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2 \perp \vec{k}$. Wir wollen zeigen, dass die Zustände zirkularer Polarisation Eigenzustände zu den entsprechenden Spinoperatoren sind. Die drei Komponenten des Spins sind dabei durch folgende antisymmetrische Dyaden beschrieben,

$$\hat{\mathbf{S}}_n = -\mathrm{i}\hbar\left(\vec{\epsilon}_l \otimes \vec{\epsilon}_m - \vec{\epsilon}_m \otimes \vec{\epsilon}_l\right)\,, \tag{5}$$

für jede zyklische Permutation $\{l, m, n\}$ von $\{1, 2, 3\}$ und $\vec{\epsilon}_3 = \vec{k}/|\vec{k}|$. Das dyadische Produkt zwischen zwei Vektoren ist dabei wie folgt definiert:

$$\vec{a} \otimes \vec{b} \equiv \vec{a}\,\vec{b}^T \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

a) Zeigen Sie, dass diese Operatoren auf einen beliebigen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ entsprechend folgender Beziehung wirken,

$$\hat{\mathbf{S}}_n \, \vec{x} = \mathrm{i}\hbar \, (\vec{\epsilon}_n \times \vec{x}) \ , \tag{7}$$

und dass diese die Kommutatorbeziehungen der Drehimpulsalgebra erfüllen,

$$\hat{\mathbf{S}}_l \hat{\mathbf{S}}_m - \hat{\mathbf{S}}_m \hat{\mathbf{S}}_l = \mathrm{i}\hbar \hat{\mathbf{S}}_n \, . \tag{8}$$

(1 Punkt)

Hinweis: Das Produkt zwischen zwei Dyaden $\hat{\mathbf{A}} = \vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2 = \vec{a}_1 \vec{a}_2^T$ und $\hat{\mathbf{B}} = \vec{b}_1 \otimes \vec{b}_2 = \vec{b}_1 \vec{b}_2^T$ ist definiert als:

$$\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} = (\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2)(\vec{b}_1 \otimes \vec{b}_2) = (\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1)(\vec{a}_1 \otimes \vec{b}_2) \, . \tag{9}$$

b) Zeigen Sie weiter, dass für die Funktionen

$$\vec{u}_{\vec{k},\pm}(\vec{r}) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \, (\vec{\epsilon}_1 \pm \mathrm{i}\vec{\epsilon}_2) \, e^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}} \tag{10}$$

folgende Eigenwertgleichungen gelten:

$$\hat{\mathbf{S}}_3 \vec{u}_{\vec{k},\pm} = \pm\hbar \vec{u}_{\vec{k},\pm} \ , \qquad \sum_{j=1}^{3} \big(\hat{\mathbf{S}}_j \hat{\mathbf{S}}_j\big) \, \vec{u}_{\vec{k},\pm} = 2\hbar^2 \vec{u}_{\vec{k},\pm} \ , \tag{11}$$

und interpretieren Sie das Ergebnis. *(1 Punkt)*

Aufgabe 9 *Lorentzkraft*

Die relativistische Hamiltonfunktion eines geladenen Teilchens mit Ladung e und Ruhemasse m in einem Viererpotential $A_\mu = (\vec{A}, \mathrm{i}\phi)$ ist gegeben durch

$$H = e\phi + c\sqrt{m^2c^2 + (\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2} \, . \tag{12}$$

Zeigen Sie, dass aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen die korrekte Lorentzkraft folgt. *(3 Punkte)*