Seminar zur Vorlesung
TPV: Fortgeschrittene Konzepte der Quantenphysik

Prof. Dr. Giovanna Morigi

SoSe 2013 **Blatt 5** **13.05.2013**

Aufgabe 10 *Kommutatorbeziehungen des elektromagnetischen Feldes*

Jedes Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ lässt sich in einen longitudinalen und transversalen Teil aufspalten,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}^{||}(\vec{r}) + \vec{A}^{\perp}(\vec{r}), \quad \text{mit } \nabla \times \vec{A}^{||} = 0 \text{ und } \nabla \cdot \vec{A}^{\perp} = 0. \tag{1}$$

Die longitudinale und transversale δ-Funktionen, definiert über

$$A_l^{||} = \sum_m \int d^3r' \; \delta_{lm}^{||}(\vec{r}-\vec{r}\,')\, A_m(\vec{r}\,')\,, \tag{2}$$

$$A_l^{\perp} = \sum_m \int d^3r' \; \delta_{lm}^{\perp}(\vec{r}-\vec{r}\,')\, A_m(\vec{r}\,')\,, \tag{3}$$

für $l, m, n \in \{x, y, z\}$, erfüllen folgende Eigenschaften:

$$\delta_{lm}^{||}(\vec{r}) = \delta_{ml}^{||}(\vec{r})\,, \quad \delta_{lm}^{||}(\vec{r}) = \delta_{lm}^{||}(-\vec{r})\,, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\delta_{mn}^{||}(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{\partial}{\partial x_m}\delta_{ln}^{||}(\vec{r}-\vec{r}\,')\,, \quad \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l}\delta_{lm}^{||}(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{\partial}{\partial x_m}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,, \tag{5}$$

$$\delta_{lm}^{\perp}(\vec{r}) = \delta_{ml}^{\perp}(\vec{r})\,, \quad \delta_{lm}^{\perp}(\vec{r}) = \delta_{lm}^{\perp}(-\vec{r})\,, \quad \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l}\delta_{lm}^{\perp}(\vec{r}-\vec{r}\,') = 0\,. \tag{6}$$

Für ihre Fouriertransformierten gilt entsprechend:

$$\delta_{lm}^{||}(\vec{k}) = \frac{k_l k_m}{|\vec{k}|^2}\,, \qquad \delta_{lm}^{\perp}(\vec{k}) = \delta_{lm} - \frac{k_l k_m}{|\vec{k}|^2}\,. \tag{7}$$

a) Zeigen Sie zunächst die folgenden Relationen:

$$\sum_{\vec{\epsilon}_\lambda} \epsilon_{\lambda,l}\epsilon_{\lambda,m} = \delta_{lm} - \frac{k_{\lambda,l}k_{\lambda,m}}{|\vec{k}_\lambda|^2}\,, \tag{8}$$

$$\sum_{\vec{\epsilon}_\lambda} \epsilon_{\lambda,l}\frac{(\vec{k}_\lambda \times \vec{\epsilon}_\lambda)_m}{|\vec{k}_\lambda|} = \sum_n \varepsilon_{lmn}\frac{k_{\lambda,n}}{|\vec{k}_\lambda|}\,, \tag{9}$$

$$\sum_{\vec{\epsilon}_\lambda} \frac{(\vec{k}_\lambda \times \vec{\epsilon}_\lambda)_l}{|\vec{k}_\lambda|}\frac{(\vec{k}_\lambda \times \vec{\epsilon}_\lambda)_m}{|\vec{k}_\lambda|} = \delta_{lm} - \frac{k_{\lambda,l}k_{\lambda,m}}{|\vec{k}_\lambda|^2}\,, \tag{10}$$

für $l, m, n \in \{x, y, z\}$ (ε_{lmn} ist der Levi-Civita-Tensor).
Zeigen Sie damit die folgende Kommutatorbeziehung der kartesischen Feldkomponenten in der Coulomb-Eichung,

$$\left[\hat{E}_x(\vec{r},t), \hat{B}_y(\vec{r}\,',t)\right] = -4\pi i c\hbar \frac{\partial}{\partial z}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,. \tag{11}$$

Dabei sind die Felder gegeben durch:

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r}) = \int d^3k \sum_{\epsilon_\lambda} \mathrm{i}\mathcal{E}_k \vec{\epsilon}_\lambda \left[\hat{a}_\lambda \mathrm{e}^{\vec{k}\cdot\vec{r}} - \hat{a}_\lambda^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\right], \text{ mit } \mathcal{E}_k = \sqrt{\hbar\omega/(4\pi^2)}\,, \tag{12}$$

$$\hat{\vec{B}}(\vec{r}) = \int d^3k \sum_{\epsilon_\lambda} \mathrm{i}\mathcal{B}_k \left(\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{\epsilon}_\lambda\right) \left[\hat{a}_\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}} - \hat{a}_\lambda^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\right], \text{ mit } \mathcal{B}_k = \sqrt{\hbar\omega/(4\pi^2)}\,. \tag{13}$$

Hinweis: Die Fourier-Rücktransformation ist hier mit dem Faktor $(2\pi)^{-3}$ definiert.

(3 Punkte)

b) Im Heisenberg-Bild sind die Operatoren der freien Felder gegeben durch

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r},t) = \int d^3k \sum_{\epsilon_\lambda} \mathrm{i}\mathcal{E}_k \vec{\epsilon}_\lambda \left[\hat{a}_\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \hat{a}_\lambda^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right], \tag{14}$$

$$\hat{\vec{B}}(\vec{r},t) = \int d^3k \sum_{\epsilon_\lambda} \mathrm{i}\mathcal{B}_k \left(\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{\epsilon}_\lambda\right) \left[\hat{a}_\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \hat{a}_\lambda^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right]. \tag{15}$$

Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{E}_x(\vec{r}_1,\, t_1), \hat{B}_y(\vec{r}_2,\, t_2)]$, und diskutieren Sie die Möglichkeit einer gemeinsamen Messung der beiden Feldkomponenten zu verschiedenen Raum-Zeit-Punkten ($\rho^2 = c^2\tau^2$, $\rho^2 > c^2\tau^2$ und $\rho^2 < c^2\tau^2$), wobei $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{\rho}$, $t_1 - t_2 = \tau$.

Hinweis: Die Frequenz ist eine Funktion von $|\vec{k}|$: $\omega = c|\vec{k}|$.

(2 Punkte)

c) Wie lautet die Beziehung zwischen $\mathcal{E}_k$ und $\mathcal{E}_\lambda$ (bzw. $\mathcal{B}_k$ und $\mathcal{B}_\lambda$) für den Übergang von der Summe $\sum_\lambda$ zum Integral $\int d^3k \sum_{\vec{\epsilon}_\lambda}$? Wie hängen die Felder vom Volumen ab? *(1 Punkt)*

Aufgabe 11 *Eigenschaften der $\boldsymbol{\gamma}$-Matrizen*

Der Dirac-Hamiltonoperator ist gegeben durch

$$\hat{H} = c\,\vec{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \vec{p} + \boldsymbol{\alpha}_t mc^2 \tag{16}$$

mit $\boldsymbol{\alpha}_\mu = (\boldsymbol{\alpha}_x, \boldsymbol{\alpha}_y, \boldsymbol{\alpha}_z, \boldsymbol{\alpha}_t)$. Es gilt $\boldsymbol{\alpha}_\mu^\dagger = \boldsymbol{\alpha}_\mu$, $\mathrm{Tr}\{\boldsymbol{\alpha}_\mu\} = 0$ sowie $\{\boldsymbol{\alpha}_\mu, \boldsymbol{\alpha}_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$, wobei der Anti-Kommutator definiert ist über $\{A, B\} = AB + BA$. Die Dirac-Gleichung in der van-der-Waerden-Form ist gegeben durch

$$\left(\boldsymbol{\gamma}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(\vec{x},t) = 0\,, \tag{17}$$

wobei die $\boldsymbol{\gamma}$-Matrizen definiert sind als $\boldsymbol{\gamma}_j = -\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}_t\boldsymbol{\alpha}_j$ für $j = 1,2,3$ und $\boldsymbol{\gamma}_4 = \boldsymbol{\alpha}_t$. Zeigen Sie folgende Eigenschaften, – ohne die Matrizen auszuschreiben –, nämlich dass

1. die Anti-Kommutatoren $\{\boldsymbol{\gamma}_\mu, \boldsymbol{\gamma}_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$ ergeben,
2. die $\boldsymbol{\gamma}_\mu$ hermitesch sind,
3. die Spur von $\boldsymbol{\gamma}_\mu$ verschwindet.

(2 Punkte)