Seminar zur Vorlesung
TPV: Fortgeschrittene Konzepte der Quantenphysik

Prof. Dr. Giovanna Morigi

SoSe 2013 **Blatt 6** **23.05.2013**

Aufgabe 12 *Kopplung des Spins an ein Magnetfeld*

In der nicht-relativistischen Quantenmechanik wird die Wechselwirkung zwischen einem freien Spin-1/2-Teilchen und einem Magnetfeld durch eine potentielle Energie der Form

$$\hat{H}^{\mathrm{spin}} = -\frac{e\hbar}{2mc}\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{B} \tag{1}$$

beschrieben, die zur kinetischen Energie addiert wird. Dabei ist $\hat{\vec{\sigma}} = \hat{\sigma}_x\vec{e}_x + \hat{\sigma}_y\vec{e}_y + \hat{\sigma}_z\vec{e}_z$ durch die Paulimatrizen gegeben.

a) Zeigen Sie, dass sich die kinetische Energie in Abwesenheit eines Vektorpotentials $\vec{A}$ schreiben lässt als

$$\hat{H}^{(\mathrm{KE})} = \frac{1}{2m}(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{p})(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{p})\,. \tag{2}$$

(1 Punkt)

b) Finden Sie die Ersetzung, die in Anwesenheit eines Vektorpotentials $\vec{A}$ in Gl. (2), auf folgenden Operator für die kinetische Energie führt:

$$\hat{H}^{(\mathrm{KE})} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e\vec{A}}{c}\right)^2 - \frac{e\hbar}{2mc}\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{B}\,. \tag{3}$$

(2 Punkte)

Aufgabe 13 *Spin der relativistischen Wellenfunktion*

In der nicht-relativistischen Pauli-Theorie des Spins wird dieser mit Hilfe der Pauli-Matrizen $\hat{\sigma}_j$, für $j = 1, 2, 3$, beschrieben. Die Erweiterung für vierkomponentige Dirac-Spinoren ist dann über den folgenden Operator gegeben:

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_j = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_k\hat{\boldsymbol{\gamma}}_l - \hat{\boldsymbol{\gamma}}_l\hat{\boldsymbol{\gamma}}_k\right), \tag{4}$$

für (j, k, l) zyklische Permutation von $(1, 2, 3)$.

a) Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die normierte Wellenfunktion eines Elektrons durch

$$\psi(\mathbf{x}, 0) = \frac{1}{\sqrt{V}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_z x_z/\hbar} \tag{5}$$

gegeben, wobei a, b, c und d unabhängig von den Raum-Zeit-Koordinaten sind, und für die $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$ gelten soll.

Finden Sie die Wahrscheinlichkeiten, das Elektron zur Zeit $t > 0$ mit positiver Energie und mit Spinkomponente entlang z in i) Spin-up, ii) Spin-down, bzw. mit negativer Energie und mit der Spinkomponente entlang z in iii) Spin-up und iv) Spin-down zu messen.

(2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass der Helizitätsoperator, definiert als Projektion von $\hat{\vec{\boldsymbol{\Sigma}}}$ entlang der Richtung von $\vec{p}$, mit dem Hamiltonoperator des freien Elektrons, $\hat{H} = c\,\hat{\vec{\boldsymbol{\alpha}}} \cdot \hat{\vec{p}} + \hat{\boldsymbol{\alpha}}_t mc^2$, kommutiert,

$$\left[\hat{\vec{\boldsymbol{\Sigma}}} \cdot \vec{p}/|\vec{p}|, \hat{H}\right] = 0\,. \tag{6}$$

Was können Sie daraus folgern? Gilt dies auch für Projektionen $\hat{\vec{\boldsymbol{\Sigma}}} \cdot \vec{e}_n$ in beliebige Richtungen $\vec{e}_n = \vec{n}/|\vec{n}|$?

Bemerkung: Die gemeinsamen Eigenzustände zu $\hat{H}$ und $\hat{\vec{\boldsymbol{\Sigma}}} \cdot \vec{p}/|\vec{p}|$ sind gegeben durch

$$\psi^{(j)} = \mathcal{N} u^{(j)}(\vec{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)/\hbar}\,, \text{ mit} \tag{7}$$

$$u^{(1)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+\mathrm{i}p_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \quad u^{(2)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x-\mathrm{i}p_y)}{E+mc^2} \\ -\frac{cp_z}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \quad u^{(3)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{cp_z}{|E|+mc^2} \\ -\frac{c(p_x+\mathrm{i}p_y)}{|E|+mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(4)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{c(p_x-\mathrm{i}p_y)}{|E|+mc^2} \\ \frac{cp_z}{|E|+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei die Normierung $\mathcal{N} = \sqrt{(|E| + mc^2)/(2|E|V)}$ wie in der Vorlesung gewählt ist.

(2 Punkte)

c) Bestimmen Sie die gemeinsamen Eigenzustände von $\hat{H}$ und $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_x$ für den Fall $\vec{p} = p\vec{e}_x$. Welche Eigenwerte haben diese jeweils?

(1 Punkt)

Aufgabe 14 *Transformationen der Spinoren*

Transformieren Sie den Eigenzustand für ein freies Elektron, Gl. (7) mit $\vec{p} = p\vec{e}_x$, in ein mit Geschwindigkeit $v = \beta c$ in x-Richtung bewegtes Bezugssystem, wobei $\beta = cp/E$ ist. Die Lorentztransformation für einen Boost in x-Richtung ist gegeben durch

$$\mathcal{S}_{\text{Lor}} = \cosh\frac{\chi}{2} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_x \sinh\frac{\chi}{2}\,, \tag{8}$$

für $\tanh\chi = \beta$. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Elektron in Ruhe, und überprüfen Sie, ob die Norm erhalten ist.

(2 Punkte)