Seminar zur Vorlesung
TPV: Fortgeschrittene Konzepte der Quantenphysik

Prof. Dr. Giovanna Morigi

SoSe 2013 **Blatt 8** **07.06.2013**

Aufgabe 17 *Fermionen in zweiter Quantisierung*

Für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Elektronen und Positronen gelten die folgenden Anti-Kommutatorrelationen:

$$\left\{\hat{\mathrm{b}}^{(s)}_{\vec{p}}\,,\hat{\mathrm{b}}^{(s')\dagger}_{\vec{p}'}\right\} = \delta_{ss'}\delta_{\vec{p}\vec{p}'}\,, \qquad \left\{\hat{\mathrm{b}}^{(s)}_{\vec{p}}\,,\hat{\mathrm{b}}^{(s')}_{\vec{p}'}\right\} = \left\{\hat{\mathrm{b}}^{(s)\dagger}_{\vec{p}}\,,\hat{\mathrm{b}}^{(s')\dagger}_{\vec{p}'}\right\} = 0\,, \tag{1}$$

$$\left\{\hat{\mathrm{d}}^{(s)}_{\vec{p}}\,,\hat{\mathrm{d}}^{(s')\dagger}_{\vec{p}'}\right\} = \delta_{ss'}\delta_{\vec{p}\vec{p}'}\,, \qquad \left\{\hat{\mathrm{d}}^{(s)}_{\vec{p}}\,,\hat{\mathrm{d}}^{(s')}_{\vec{p}'}\right\} = \left\{\hat{\mathrm{d}}^{(s)\dagger}_{\vec{p}}\,,\hat{\mathrm{d}}^{(s')\dagger}_{\vec{p}'}\right\} = 0\,, \tag{2}$$

$$\text{und} \quad \left\{\hat{\mathrm{d}}^{(s)}_{\vec{p}}\,,\hat{\mathrm{b}}^{(s')\dagger}_{\vec{p}'}\right\} = \left\{\hat{\mathrm{d}}^{(s)}_{\vec{p}}\,,\hat{\mathrm{b}}^{(s')}_{\vec{p}'}\right\} = \left\{\hat{\mathrm{d}}^{(s)\dagger}_{\vec{p}}\,,\hat{\mathrm{b}}^{(s')\dagger}_{\vec{p}'}\right\} = 0\,, \tag{3}$$

a) Zeigen Sie, dass aus den Anti-Kommutatorrelationen das Pauli'sche Ausschlussprinzip für $s = s'$ und $\vec{p} = \vec{p}'$ folgt. Zeigen Sie weiter, dass für $s \neq s'$, $\vec{p} \neq \vec{p}'$, die Wellenfunktion antisymmetrisch unter dem Austausch $\{s, \vec{p}\} \leftrightarrow \{s', \vec{p}'\}$ ist. Welche Eigenwerte können die Anzahloperatoren für Elektronen $\hat{\mathrm{N}}^{(s)}_{\vec{p}} := \hat{\mathrm{b}}^{(s)\dagger}_{\vec{p}}\hat{\mathrm{b}}^{(s)}_{\vec{p}}$ und Positronen $\hat{\bar{\mathrm{N}}}^{(s)}_{\vec{p}} := \hat{\mathrm{d}}^{(s)\dagger}_{\vec{p}}\hat{\mathrm{d}}^{(s)}_{\vec{p}}$ annehmen? *(2 Punkte)*

b) In der Vorlesung wurde die Hamiltonfunktion des Dirac-Feldes eingeführt,

$$\hat{\mathrm{H}} = \int_V \mathrm{d}^3x\, \hat{\psi}^\dagger \Big(-\mathrm{i}\hbar c\hat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\nabla + \alpha_t mc^2\Big)\hat{\psi}\,, \tag{4}$$

mit dem quantisierten Feldoperator (Normierung $u^{(r)\dagger}(\vec{p})u^{(r)}(\vec{p}') = \frac{|E|}{mc^2}$)

$$\hat{\psi}(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{p}}\sqrt{\frac{mc^2}{|E|}}\left(\sum_{r=1}^{2}\hat{\mathrm{b}}^{(r)}_{\vec{p}}\,u^{(r)}(\vec{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)/\hbar} + \sum_{r=3}^{4}\hat{\mathrm{b}}^{(r)}_{-\vec{p}}u^{(r)}(-\vec{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)/\hbar}\right). \tag{5}$$

Die Gesamtladung $\hat{\mathrm{Q}}$, der Gesamtimpuls $\hat{\vec{\mathrm{P}}}$, und die Gesamtspinprojektion $\hat{\mathrm{S}}_3$ entlang x_3 sind definiert als

$$\hat{\mathrm{Q}} = e\int_V \mathrm{d}^3x\,\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}\,, \qquad \hat{\vec{\mathrm{P}}} = -\mathrm{i}\hbar\int_V \mathrm{d}^3x\,\hat{\psi}^\dagger\nabla\hat{\psi}\,, \qquad \hat{\mathrm{S}}_3 = \frac{\hbar}{2}\int_V \mathrm{d}^3x\,\hat{\psi}^\dagger\hat{\Sigma}_3\hat{\psi}\,. \tag{6}$$

Integrieren Sie die Ausdrücke für $\hat{\mathrm{H}}$, $\hat{\mathrm{Q}}$, und $\hat{\vec{\mathrm{P}}}$ explizit aus, um die folgenden Darstellungen in zweiter Quantisierung zu erhalten:

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{H}} &= \sum_{\vec{p}}\sum_{s=1,2} E\Big(\hat{\mathrm{b}}^{(s)\dagger}_{\vec{p}}\hat{\mathrm{b}}^{(s)}_{\vec{p}} + \hat{\mathrm{d}}^{(s)\dagger}_{\vec{p}}\hat{\mathrm{d}}^{(s)}_{\vec{p}}\Big)\,, \quad \hat{\mathrm{Q}} = e\sum_{\vec{p}}\sum_{s=1,2}\Big(\hat{\mathrm{b}}^{(s)\dagger}_{\vec{p}}\hat{\mathrm{b}}^{(s)}_{\vec{p}} - \hat{\mathrm{d}}^{(s)\dagger}_{\vec{p}}\hat{\mathrm{d}}^{(s)}_{\vec{p}}\Big)\,,\\ \hat{\vec{\mathrm{P}}} &= \sum_{\vec{p}}\sum_{s=1,2}\vec{p}\Big(\hat{\mathrm{b}}^{(s)\dagger}_{\vec{p}}\hat{\mathrm{b}}^{(s)}_{\vec{p}} + \hat{\mathrm{d}}^{(s)\dagger}_{-\vec{p}}\hat{\mathrm{d}}^{(s)}_{-\vec{p}}\Big)\,.\end{aligned} \tag{7}$$

Verifizieren Sie weiter, dass $\hat{\mathrm{b}}^{(s)\dagger}_{\vec{p}}\,|\mathrm{vac}\rangle$ und $\hat{\mathrm{d}}^{(s)\dagger}_{\vec{p}}\,|\mathrm{vac}\rangle$ mit gleichem $\vec{p}$ und s tatsächlich jeweils Elektron- bzw. Positronzustände mit gleicher Spinausrichtung sind. *(2 Punkte)*

Aufgabe 18 *Teilchen mit Spin Null*

Sei ψ ein reeles skalares Feld mit Spin gleich Null. Der quantisierte Feldoperator ist hermitesch, $\hat{\psi}^\dagger = \hat{\psi}$, und gegeben durch

$$\hat{\psi} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{2E}} \Big(\hat{\mathrm{c}}_{\vec{p}}\, \mathrm{e}^{+\mathrm{i}(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)/\hbar} + \hat{\mathrm{c}}_{\vec{p}}^\dagger\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)/\hbar} \Big) . \tag{8}$$

Das Feld beschreibt ein System von Teilchen nur einer Sorte, die man auch als Antiteilchen zu sich selbst auffassen kann.
Zeigen Sie, dass die Hamiltonsche Funktion

$$\hat{\mathrm{H}} = \frac{\hbar^2 c^2}{2} \int_V \mathrm{d}^3x \left[\frac{1}{c^2} \Big(\frac{\partial \psi}{\partial t} \Big)^2 + \big(\nabla \psi \big)^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi^2 \right] \tag{9}$$

geschrieben werden kann als

$$\hat{\mathrm{H}} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{p}} E \Big(\hat{\mathrm{c}}_{\vec{p}}^\dagger \hat{\mathrm{c}}_{\vec{p}} + \hat{\mathrm{c}}_{\vec{p}} \hat{\mathrm{c}}_{\vec{p}}^\dagger \Big) . \tag{10}$$

Untersuchen Sie die Eigenwerte von $\hat{\mathrm{H}}$ für kommutierende und antikommutierende Operatoren, und schließen Sie daraus, ob die Anregungen des reelen skalaren Feldes Bosonen oder Fermionen sind. Berechnen Sie die Stromdichte

$$j_\mu = -\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m} \Big[\hat{\psi}^\dagger (\partial_\mu \hat{\psi}) - (\partial_\mu \hat{\psi}^\dagger) \hat{\psi} \Big] , \tag{11}$$

und argumentieren Sie, welche Ladung die Teilchen haben können. *(2 Punkte)*

Aufgabe 19 *Energie-Impuls-Tensor für reelle skalare Felder*

Für die Feldbeschreibung ist es sinnvoll, Energie und Impuls der Teilchen als Integrale über die entsprechenden Energie- und Impulsdichten auszudrücken. Diese lassen sich über den Energie-Impulstensor $T_{\mu\nu}$ zusammenfassen, welcher für ein reeles skalares Feld ψ gegeben ist durch:

$$T_{\mu\nu} = -\partial_\nu \psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} + \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} , \quad \text{mit} \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \Big(\partial_\mu \psi\, \partial_\mu \psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi^2 \Big) . \tag{12}$$

Den Impuls-Vierervektor erhält man dann durch Integration, $P_\mu = -\mathrm{i} \int_V \mathrm{d}^3x\, T_{4\mu}$. Das Feld erfülle weiter die Euler-Lagrange-Gleichungen,

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 . \tag{13}$$

Zeigen Sie, dass i) $-T_{44}$ der Energiedichte in Gl. (9) entspricht, dass ii) $-\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0$ gilt, und iii) unter welchen Bedingungen $\frac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}t} = 0$ erfüllt ist. *(3 Punkte)*