Seminar zur Vorlesung
TPV: Fortgeschrittene Konzepte der Quantenphysik

Prof. Dr. Giovanna Morigi

SoSe 2013 **Blatt 9** **21.06.2013**

Aufgabe 20 *Dipol-Wechselwirkung*

Wir wollen für nicht-relativistische Wechselwirkung zwischen einem Atom und dem elektromagnetischen Feld für den Fall spontaner Emission untersuchen. Dabei sei das Atom anfangs im angeregten Zustand $|e\rangle$ und das elektromagnetische Feld im Vakuumzustand $|\text{vac}\rangle$, und nach der Emission befindet sich das Atom im Grundzustand $|g\rangle$ und das Feld im Zustand $|1_{\lambda'}\rangle$, d.h. es gibt eine Anregungung des Feldes in einer Mode $\lambda' = (\vec{k}_{\lambda'}, \vec{\epsilon}_{\lambda'})$. Die Frequenz der Mode $\omega_{\lambda'}$, in die das Photon emittiert wird, sei dabei gerade resonant zur atomaren Übergangsfrequenz $\omega_0 = \omega_e - \omega_g$. Das Übergangsmatrixelement zwischen Anfangs- und Endzustand ist in niedrigster Ordnung Störungstheorie wie folgt gegeben,

$$\langle g, 1_{\lambda'}|\hat{\mathrm{H}}^{(1)}_{\text{int}}|e, \text{vac}\rangle = -\frac{e}{mc}\langle g, 1_{\lambda'}|\hat{\vec{\mathrm{p}}} \cdot \hat{\vec{\mathrm{A}}}^{\perp}(\vec{R})|e, \text{vac}\rangle\,,$$

wobei das transversale Vektorpotential gegeben ist durch

$$\hat{\vec{\mathrm{A}}}^{\perp}(\vec{R}) = \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_\lambda}}\vec{\epsilon}_\lambda \left(\hat{\mathrm{a}}_\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}_\lambda\cdot\vec{R}} + \hat{\mathrm{a}}^\dagger_\lambda \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}_\lambda\cdot\vec{R}}\right),$$

mit $\vec{\epsilon}_\lambda \perp \vec{k}_\lambda$ und $\omega_\lambda = c|\vec{k}_\lambda|$; $\vec{R}$ ist dabei die Position des Schwerpunktes des Atoms. Zeigen Sie, dass das Übergangsmatrixelement in niedrigster Ordnung Störungstheorie geschrieben werden kann als

$$-\langle g, 1_{\lambda'}|\hat{\vec{\mathrm{d}}} \cdot \hat{\vec{\mathrm{E}}}^{\perp}(\vec{R})|e, \text{vac}\rangle\,,$$

wobei $\hat{\vec{\mathrm{d}}} = e\,\hat{\vec{\mathrm{r}}}$ das atomare Dipolmoment, und $\hat{\vec{\mathrm{E}}}^{\perp}(\vec{R})$ das transversale elektrische Feld ist, gegeben durch

$$\hat{\vec{\mathrm{E}}}^{\perp}(\vec{R}) = \mathrm{i}\sum_{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_\lambda}{V}}\vec{\epsilon}_\lambda \left(\hat{\mathrm{a}}_\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}_\lambda\cdot\vec{R}} - \hat{\mathrm{a}}^\dagger_\lambda \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}_\lambda\cdot\vec{R}}\right).$$

(2 Punkte)

Aufgabe 21 *Übergangsamplituden*

Der Hamiltonoperator eines Systems sei durch $H = H_0 + V$ beschrieben, wobei H_0 zeitunabhängig sei und $|\phi_l\rangle$ als Eigenfunktionen habe. V sei eine Störung, die auch zeitabhängig sein kann. Im Wechselwirkungsbild (gekennzeichnet durch $\tilde{}$) ist der Zeitentwicklungsoperator gegeben durch:

$$\tilde{U}(t_f, t_i) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{U}^{(n)}(t_f, t_i)\,, \tag{1}$$

wobei

$$\tilde{U}^{(n)}(t_f, t_i) = \left(\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\right)^n \int d\tau_n \cdots d\tau_2 d\tau_1 \, \tilde{V}(\tau_n) \cdots \tilde{V}(\tau_2)\tilde{V}(\tau_1) \tag{2}$$

für $t_f \geq \tau_n \geq \cdots \geq \tau_2 \geq \tau_1 \geq t_i$ gegeben ist, und $\tilde{V}(t)$ die Störung im Wechselwirkungsbild ist. Die Matrixelemente der S-Matrix oder Streumatrix zwischen einem Eigenzustand $|\phi_i\rangle$ als Anfangszustand und einem Eigenzustand $|\phi_f\rangle$ als Endzustand sind gegeben als

$$S_{fi} = \langle\phi_f|\tilde{U}(t_f, t_i)|\phi_i\rangle = \delta_{fi} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{fi}^{(n)} \, , \tag{3}$$

wobei $S_{fi}^{(n)} = \langle\phi_f|\tilde{U}^{(n)}(t_f, t_i)|\phi_i\rangle$ für die n-te Ordnung der Streumatrix steht.

a) Berechnen Sie die Übergangsamplitude $S_{fi}^{(1)}$ der ersten Ordnung. Wie sieht diese für $t_i \to -\infty$ und $t_f \to +\infty$ aus? *(2 Punkte)*

b) Bestimmen Sie die Übergangsamplitude $S_{fi}^{(2)}$ der zweiten Ordnung. Wie verhält sich $S_{fi}^{(2)}$ für $t_i \to -\infty$ und $t_f \to +\infty$, wenn die Energieeigenwerte $E_i \neq E_f$ nicht gleich sind? *(2 Punkte)*

Hinweis: Um die Divergenz des Integrals zu vermeiden, können Sie die Identität

$$e^{-\mathrm{i}E_k(\tau_2-\tau_1)/\hbar}\Theta(\tau_2 - \tau_1) = \lim_{\eta\to 0^+} -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\mathrm{i}E(\tau_2-\tau_1)/\hbar}}{E - E_k + \mathrm{i}\eta} dE \tag{4}$$

verwenden.

Aufgabe 22 *Spontane Emission*

Wir wollen nun die spontane Emission eines Wasserstoffatoms mit Berücksichtigung des Photonenrückstoßes untersuchen.

a) Geben Sie den Hamiltonoperator (nicht-relativistisch) für ein Atom in der Dipol-Näherung an. *(2 Punkte)*

b) Der Anfangszustand ist gegeben als $|i\rangle = |\vec{P}, e; \mathrm{vac}\rangle$, wobei $\vec{P}$ der Impuls der Schwerpunktbewegung, $|e\rangle$ ein angeregter elektronischer Zustand des Atoms, und $|\mathrm{vac}\rangle$ der Vakuumzustand des Feldes ist. Dessen Energie ist $E_i = \vec{P}^2/2M + \hbar\omega_0$, mit M der Gesamtmasse und $\omega_0 = \omega_e - \omega_g$ der Übergangsfrequenz. Berechnen Sie das Matrixelement $V_{fi} = \langle f|\hat{\mathrm{H}}_{\mathrm{int}}^{(1)}|i\rangle$, mit $|f\rangle = |\vec{P}', g; 1_\lambda\rangle$ mit $E_f = \vec{P}'^2/2M + \hbar\omega_\lambda$. Hierbei ist $|g\rangle$ der Grundzustand des Atoms und $\vec{P}'$ der Impuls der Schwerpunktsbewegung nach der Emission des Photons, sowie $|1_\lambda\rangle$ das Feld mit einem Photon in Mode λ. *(2 Punkte)*

c) Berechnen Sie die Übergangsamplitude $\mathcal{S}_{fi}^{(1)} = -2\pi\mathrm{i}\, V_{fi}\, \delta^{(t)}(E_f - E_i)$ der ersten Ordnung, mit

$$\delta^{(t)}(E_1 - E_2) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-t/2}^{+t/2} \mathrm{d}\tau \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_1-E_2)\tau/\hbar} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin\left[(E_1 - E_2)t/2\hbar\right]}{E_1 - E_2} \, .$$

Wie hängt die Frequenz des emittierten Photons von der Richtung der Abstrahlung relativ zur Bewegung ab? Wann kann man den Effekt der Bewegung in der Rechnung vernachlässigen? *(2 Punkte)*