Seminar zur Vorlesung
TPV: Fortgeschrittene Konzepte der Quantenphysik

Prof. Dr. Giovanna Morigi

SoSe 2013 **Blatt 10** **05.07.2013**

Aufgabe 23 *Rayleigh-Streuung*

Wir betrachten nun die Streuung von Photonen an einem ruhendem Atom in der Dipolnäherung. Vor dem Streuprozeß befindet sich das Atom in einem Eigenzustand $|A\rangle$ und das einfallende Photon sei durch $\lambda' = (\vec{k}_{\lambda'}, \vec{\epsilon}_{\lambda'})$ bestimmt. Nach dem Streuprozeß befinde sich das Atom in einem Eigenzustand $|B\rangle$, und das gestreute Photon sei durch $\lambda'' = (\vec{k}_{\lambda''}, \vec{\epsilon}_{\lambda''})$ charakterisiert. Der Hamiltonoperator ist gegeben durch

$$\hat{\mathrm{H}} = \hat{\mathrm{H}}_{\mathrm{rel}} + \hat{\mathrm{H}}_{\mathrm{emf}} + \hat{\mathrm{H}}^{(1)}_{\mathrm{int}} + \hat{\mathrm{H}}^{(2)}_{\mathrm{int}} \,, \tag{1}$$

mit

$$\hat{\mathrm{H}}_{\mathrm{rel}} = \sum_j \hbar\omega_j \, |j\rangle\langle j| \,, \qquad \hat{\mathrm{H}}_{\mathrm{emf}} = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda \hat{\mathrm{a}}^\dagger_\lambda \hat{\mathrm{a}}_\lambda \,, \tag{2}$$

$$\hat{\mathrm{H}}^{(1)}_{\mathrm{int}} = -\frac{e}{\mu c}\hat{\vec{\mathrm{p}}} \cdot \vec{A}^\perp(0) \,, \qquad \hat{\mathrm{H}}^{(2)}_{\mathrm{int}} = \frac{e^2}{2\mu c^2}\vec{A}^{\perp 2}(0) \,, \tag{3}$$

a) Berechnen Sie die Beiträge zur Übergangsamplitude $S^{(1)}_{fi}$ mit Hilfe der Matrixelemente $\langle B; 1_{\lambda''}|\hat{\mathrm{H}}^{(1)}_{\mathrm{int}}|A; 1_{\lambda'}\rangle$ und $\langle B; 1_{\lambda''}|\hat{\mathrm{H}}^{(2)}_{\mathrm{int}}|A; 1_{\lambda'}\rangle$. Leiten Sie die Übergangsamplitude her:

$$S^{(1)}_{fi} = -2\pi\mathrm{i}\frac{e^2}{2\mu c^2}\frac{2\pi c^2\hbar}{V\sqrt{\omega'\omega''}} 2\,\delta_{AB}\,\vec{\epsilon}_{\lambda''}\cdot\vec{\epsilon}_{\lambda'} \times\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_B+\hbar\omega_{\lambda''}-E_A-\hbar\omega_{\lambda'})t/2\hbar}\,\delta^{(t/2)}(E_B+\hbar\omega''-E_A-\hbar\omega') \tag{4}$$

(2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Terme gleicher Ordnung in (e/c), die zur Übergangsamplitude $S^{(2)}_{fi}$ beitragen. Berechnen Sie die Übergangsamplitude:

$$S^{(2)}_{fi} = -2\pi\mathrm{i}\frac{2\pi c^2\hbar}{V\sqrt{\omega'\omega''}}\left(\frac{e}{\mu c}\right)^2\sum_I\left(\frac{\langle B|\hat{\vec{\mathrm{p}}}\cdot\vec{\epsilon}_{\lambda'}|I\rangle\langle I|\hat{\vec{\mathrm{p}}}\cdot\vec{\epsilon}_{\lambda''}|A\rangle}{E_A-E_I-\hbar\omega''}+\frac{\langle B|\hat{\vec{\mathrm{p}}}\cdot\vec{\epsilon}_{\lambda''}|I\rangle\langle I|\hat{\vec{\mathrm{p}}}\cdot\vec{\epsilon}_{\lambda')}|A\rangle}{E_A-E_I+\hbar\omega'}\right) \times\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_B+\hbar\omega''-E_A-\hbar\omega')t/2\hbar}\,\delta^{(t/2)}(E_B-E_A+\hbar\omega''-\hbar\omega') \,, \tag{5}$$

mit $\hat{\mathrm{H}}_{\mathrm{rel}}\,|I\rangle = E_I\,|I\rangle$. Welche Zwischenzustände $|I\rangle$ tragen zur Amplitude bei und wie lautet ihre Energie? *(3 Punkte)*

c) Berechnen Sie mit den Ergebnissen aus a) und b) die Übergangswahrscheinlichkeit. Bestimmen Sie dann damit die Rate $R_{\lambda'\to\lambda''}$, d.h. die Übergangswahrscheinlichkeit pro Sekunde, der gestreuten Photonen für $\lambda' \to \lambda''$. Finden Sie die Übergangsrate $R_{\mathrm{d}\Omega}$ für die Streuung von Photonen in ein differentielles Raumwinkelelement $\mathrm{d}\Omega$, indem Sie die Summe über die in Frage kommenden Moden durch das Integral über alle Wellenzahlen, $\frac{V}{8\pi^3}\,\mathrm{d}\Omega \int \mathrm{d}k\, k^2$, ersetzen. Bestimmen Sie dann damit den differentiellen Streuquerschnitt, indem Sie die Übergangsrate $R_{\mathrm{d}\Omega}$ durch die einfallende Teilchenstromdichte und $\mathrm{d}\Omega$ teilen. Dies ergibt die sogenannte Kramers-Heisenberg-Formel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{\mu c^2}\right)^2 \left(\frac{\omega''}{\omega'}\right) \Bigg| \delta_{AB} \vec{\epsilon}_{\lambda'} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda''} - \frac{1}{\mu} \sum_I \left(\frac{\langle B|\hat{\vec{\mathrm{p}}} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda''}|I\rangle\langle I|\hat{\vec{\mathrm{p}}} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda'}|A\rangle}{E_I - E_A - \hbar\omega'} + \frac{\langle B|\hat{\vec{\mathrm{p}}} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda'}|I\rangle\langle I|\hat{\vec{\mathrm{p}}} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda''}|A\rangle}{E_I - E_A + \hbar\omega''} \right) \Bigg|^2 . \tag{6}$$

$e^2/(\mu c^2) = r_e$ ist dabei der klassische Elektronenradius.

(3 Punkte)

d) Wir beschränken uns auf die sogenannte *Rayleigh-Streuung*, welche durch $|A\rangle = |B\rangle$, $\hbar\omega' = \hbar\omega'' \ll E_I - E_A$ definiert ist.

Dazu wollen wir zunächst folgende Beziehung herleiten:

$$\vec{\epsilon}_{\lambda'} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda''} = \frac{1}{\mu\hbar} \sum_I \frac{1}{\omega_{IA}} \Big[\langle A|\hat{\vec{\mathrm{p}}} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda'}|I\rangle\langle I|\hat{\vec{\mathrm{p}}} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda''}|A\rangle + \langle A|\hat{\vec{\mathrm{p}}} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda''}|I\rangle\langle I|\hat{\vec{\mathrm{p}}} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda'}|A\rangle \Big] . \tag{7}$$

Hierbei ist $\omega_{IA} = (E_I - E_A)/\hbar$.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst das Matrixelement $\langle B|\hat{\vec{\mathrm{p}}}|A\rangle$. Drücken Sie den Impulsoperator geeignet durch den Ortsoperator aus, indem Sie die Heisenberggleichung von $\hat{\vec{\mathrm{x}}}$ in niedrigster Ordnung in e berechnen. Verwenden Sie weiter die Kommutatorbeziehung zwischen Orts- $\vec{x}$ und Impulsoperator $\hat{\vec{\mathrm{p}}}$ des Elektrons und die Vollständigkeit der Zwischenzustände $|I\rangle$, die sich aus den gebundenen und den Kontinuumszuständen zusammensetzen. *(2 Punkte)*

e) Überzeugen Sie sich, dass die Näherung $1/(\omega_{IA} \pm \omega') \approx [1 \mp (\omega'/\omega_{IA})]/\omega_{IA}$ für $\omega' \ll \omega_{IA}$ gültig ist. Verwenden Sie dies zusammen mit Gl. (7) um den differentiellen Rayleigh-Streuquerschnitt herzuleiten:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{\mu c^2}\frac{\mu}{\hbar}\right)^2 \omega'^4 \Bigg| \sum_I \omega_{IA}^{-1} \Big[\langle A|\vec{x} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda''}|I\rangle\langle I|\vec{x} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda'}|A\rangle + \langle A|\vec{x} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda'}|I\rangle\langle I|\vec{x} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda''}|A\rangle \Big] \Bigg|^2 . \tag{8}$$

Wie lässt sich mit Hilfe dieser Gleichung erklären, dass uns der Himmel blau und der Sonnenuntergang rot erscheint?

Bonusfrage: Warum ist dann der Himmel nicht violett? *(3 Punkte)*