

# Übung zur Vorlesung Theoretische Physik III LAG (Quantenmechanik und statistische Mechanik)

SoSe 2014

Blatt 2

24.04.2014

## Aufgabe 3 *Rechnen mit Messsymbolen*

- a) Ein Projektor  $\mathcal{P}$  hat die Eigenschaft  $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ . Zeigen Sie, dass das Messsymbol

$$|a'\rangle\langle a'| + |a''\rangle\langle a''|, \quad \text{mit } a' \neq a''$$

diese Eigenschaft ebenfalls besitzt.

(1 Punkt)

- b) Berechnen Sie den Kommutator

$$\left[ |a'\rangle\langle a''|, |a'''\rangle\langle a''| \right].$$

(1 Punkt)

## Aufgabe 4 *Umskalierung von Zustandsvektoren*

- a) Gegeben sind die Zustandsvektoren  $\langle a'|$  und  $|a''\rangle$ . Aus ihnen konstruieren wir

$$\langle \bar{a}'| = \lambda(a')\langle a'| \quad \text{und} \quad |\bar{a}''\rangle = \frac{1}{\lambda(a'')}|a''\rangle, \quad \text{mit } \lambda(a'), \lambda(a'') \in \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie, dass Orthonormalität und Vollständigkeit immernoch erfüllt sind:

$$\langle \bar{a}'|\bar{a}''\rangle = \delta_{a',a''} \quad \text{und} \quad \sum_{a'} |\bar{a}'\rangle\langle \bar{a}'| = \mathbf{1}.$$

(1 Punkt)

- b) Eine analoge Umskalierung mit  $\lambda(b')$  wird bei  $\langle b'|$  und  $|b'\rangle$  durchgeführt. Finden Sie eine Einschränkung der  $\lambda(a')$  und  $\lambda(b')$ , die

$$\langle \bar{b}'|\bar{a}'\rangle = \langle \bar{a}'|\bar{b}'\rangle^*$$

garantiert. Erklären Sie, warum dies impliziert, dass  $\langle a'|b'\rangle$  an sich keine Wahrscheinlichkeit darstellen kann, wohingegen  $\langle a'|b'\rangle\langle b'|a'\rangle$  tatsächlich eine ist. (1 Punkt)

## Aufgabe 5 *Eigenschaften von Kommutatoren*

- a) Zeigen Sie, dass der Kommutator linear in beiden Argumenten ist. (1 Punkt)
- b) Beweisen Sie die Kommutatoridentität

$$[X, YZ] = Y[X, Z] + [X, Y]Z .$$

Geben Sie die analoge Beziehung für  $[XY, Z]$  an. (1 Punkt)

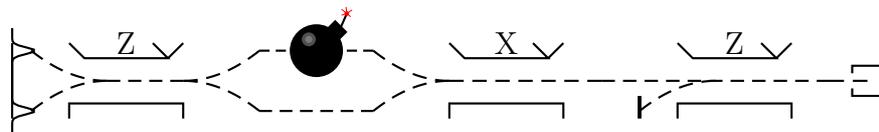
- c) Überprüfen Sie Gültigkeit der Relation

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0 .$$

(1 Punkt)

## Aufgabe 6 *Wechselwirkungsfreie Messung: Stern-Gerlach und die Bombe*

Wir betrachten die folgende Reihe von Stern-Gerlach-Apparaturen:



Der erste Stern-Gerlach-Apparat ( $Z$ ) selektiert den  $+_z$ -Strahl. Der zweite Apparat ( $X$ ) hingegen ist nicht-selektiv und um  $90^\circ$  gedreht. Es besteht die Möglichkeit in den  $+_x$ -Strahl eine hochsensible Bombe zu platzieren, die schon bei der Berührung mit einem einzelnen Atom detoniert. Die beiden Strahlen werden wieder zusammengeführt und durch einen letzten Apparat ( $Z$ ) geschickt.

- a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten an, dass ein Atom in Abwesenheit der Bombe mit positiver bzw. negativer Auslenkung auf den Schirm auftrifft. (1 Punkt)
- b) Wie hoch sind diese Wahrscheinlichkeiten im Falle, dass sich die Bombe im oberen Strahlengang befindet? (1 Punkt)
- c) Befassen Sie sich nun mit dem Fall, dass man nicht weiß, ob sich im Versuchsaufbau eine Bombe befindet oder nicht. Wie kann das Experiment genutzt werden um die Anwesenheit einer Bombe zu detektieren, ohne dass diese explodiert? Kann dieser Versuch also dazu genutzt werden eine wechselwirkungsfreie Messung durchzuführen? (1 Punkt)