Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III LAG
(Quantenmechanik und statistische Mechanik)

SoSe 2014 **Blatt 3** **30.04.2014**

Aufgabe 7 *Gemeinsame Eigenbasis*

Zeigen Sie folgende Äquivalenz für zwei Observablen $\hat{A}$ und $\hat{B}$:

$$\hat{A} \text{ und } \hat{B} \text{ haben eine gemeinsame Basis von Zustandsvektoren} \Longleftrightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = 0 \ .$$

(2 Punkte)

Aufgabe 8 *Pauli-Operatoren*

Die Pauli-Operatoren sind durch

$$\hat{\sigma}_x = |+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+| \ , \quad \hat{\sigma}_y = i|-\rangle\langle+| - i|+\rangle\langle-| \text{ und } \hat{\sigma}_z = |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-| \ .$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Pauli-Operatoren mit $j, k, l \in \{x, y, z\}$ die Relationen

$$\hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_k = \delta_{j,k} \mathbb{1} + i \sum_l \epsilon_{jkl} \hat{\sigma}_l \quad \text{und} \quad \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_z = i \, \mathbb{1}$$

erfüllen, wobei letztere für zyklische Vertauschung der Indizes erhalten bleibt. *(2 Punkte)*

b) Beweisen Sie, dass die Operatoren $\hat{\sigma}_j$ und $\hat{S}_j = \hat{\sigma}_j/2$, $j = x, y, z$, den Antikommutator- und. Kommutatorrelationen

$$\{\hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_k\} = 2\, \delta_{j,k} \mathbb{1} \quad \text{und} \quad [\hat{S}_j, \hat{S}_k] = i \sum_l \epsilon_{jkl} \hat{S}_l \ .$$

genügen. *(2 Punkte)*

c) Zeigen Sie, dass für den Paulivektor $\hat{\vec{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)^\top$ und zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{a})(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i \, \hat{\vec{\sigma}} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \ .$$

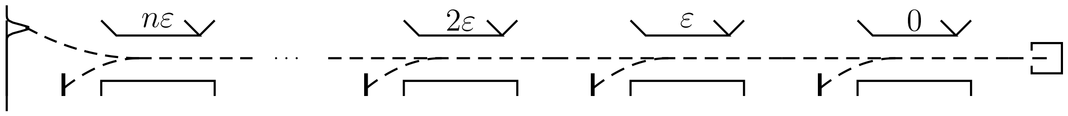
Nutzen Sie diese Eigenschaft um für einen normierten Vektor $\vec{n}$

$$(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{n})^2 = 1$$

zu zeigen. *(2 Punkte)*

Aufgabe 9 *Quanten-Zeno-Effekt*

Wir betrachten erneut eine Folge von Stern-Gerlach-Apparaten. Der erste Apparat selektiert den "+"-Strahl. Danach folgen n weitere Apparate, die wieder den "+"-Strahl selektieren. Dabei ist jeder Apparat seinem vorhergegangenen gegenüber um ε verdreht (d.h. der letzte Apparat schließt mit dem ersten den Winkel $\theta = n\varepsilon$ ein):



a) Wie hoch ist allgemein die Wahrscheinlichkeit, dass ein "+"-Atom alle n Apparate durchfliegt? Berechnen Sie diese konkret für $\theta = \pi/2$ und $n = 1, 2, 3, 5, 10, 15, 45, 90, 180, 360$.

(1 Punkt)

b) Betrachten Sie nun für einen festen Winkel θ den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit des Passierens in diesem Limes? Diskutieren Sie dieses Ergebnis.

(1 Punkt)