Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III LAG
(Quantenmechanik und statistische Mechanik)

SoSe 2014 **Blatt 5** **15.05.2014**

Aufgabe 14 *Drehungen und unitäre Transformationen*

Sei $\vec{n}$ ein normierter Vektor. In Kugelkoordinaten seien die beiden Winkel wie üblich mit φ und θ bezeichnet.

a) Nutzen Sie die Algebra der Pauli-Operatoren um $\vec{n} \cdot \vec{\hat{\sigma}}$ auf eine Form zu bringen, in der $\hat{\sigma}_y$ nicht mehr auftaucht. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie nun für einen beliebigen normierten Vektor $\vec{\nu}$ die Identität

$$e^{\pm i(\vec{\nu}\cdot\vec{\hat{\sigma}})\alpha} = \cos\alpha \pm i\,\vec{\nu}\cdot\vec{\hat{\sigma}}\,\sin\alpha$$

und nutzen Sie diese um das Ergebnis aus a) als

$$\vec{n}\cdot\vec{\hat{\sigma}} = \hat{\sigma}_z\,\cos\theta + e^{-i\hat{\sigma}_z\varphi}\,\hat{\sigma}_x\,\sin\theta$$

zu schreiben, indem Sie $\vec{\nu}$ und α geeignet wählen. *(1 Punkt)*

c) Beweisen Sie, dass für einen hermiteschen Operator $\hat{O}$ und $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ die Relation

$$e^{i\hat{O}\mu_1}\,e^{i\hat{O}\mu_2} = e^{i\hat{O}(\mu_1+\mu_2)}$$

gilt. Benutzen Sie dies, b) und die Antikommutatorrelation der Pauli-Operatoren um

$$e^{-i\hat{\sigma}_z\varphi}\,\hat{\sigma}_x = e^{-i\hat{\sigma}_z\varphi/2}\,\hat{\sigma}_x\,e^{i\hat{\sigma}_z\varphi/2} \quad \text{und} \quad \hat{\sigma}_z = e^{-i\hat{\sigma}_z\varphi/2}\,\hat{\sigma}_z\,e^{i\hat{\sigma}_z\varphi/2}$$

zu zeigen. *(1 Punkt)*

d) Bisher sollten Sie auf das Ergebnis

$$\vec{n}\cdot\vec{\hat{\sigma}} = e^{-i\hat{\sigma}_z\varphi/2}\,(\hat{\sigma}_z\,\cos\theta + \hat{\sigma}_x\,\sin\theta)\,e^{i\hat{\sigma}_z\varphi/2}$$

gekommen sein. Die Identität aus b) soll nun durch erneute Wahl von $\vec{\nu}$ und α genutzt werden um

$$\vec{n}\cdot\vec{\hat{\sigma}} = \hat{U}^\dagger\,\hat{\sigma}_z\,\hat{U} \quad \text{mit} \quad \hat{U} = e^{i\hat{\sigma}_y\theta/2}\,e^{i\hat{\sigma}_z\varphi/2}$$

zu erhalten. *(1 Punkt)*

e) Zeigen Sie in einem letzten Schritt, dass für einen Eigenzustand $|m_n\rangle$ von $\vec{n}\cdot\vec{\hat{\sigma}}$

$$|m_n\rangle = \hat{U}^\dagger|m_z\rangle$$

gilt, wenn $|m_z\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{\sigma}_z$ ist. Erläutern Sie anhand davon den Zusammenhang zwischen Drehungen im Konfigurationsraum und unitären Transformationen im Spinraum. *(1 Punkt)*

Aufgabe 15 *Komplementäre Operatoren*

Wir beschäftigen uns mit den beiden komplementären Operatoren $\hat{K}$ und $\hat{Q}$, die jeweils $n+1$ mögliche Messergebnisse haben und durch

$$\hat{K} = \frac{2\pi}{n+1} \sum_{j=0}^{n} j \, |K_j\rangle\langle K_j| \quad \text{bzw.} \quad \hat{Q} = \frac{2\pi}{n+1} \sum_{j=0}^{n} j \, |Q_j\rangle\langle Q_j|$$

gegeben sind. Der Zusammenhang zwischen den Eigenvektoren von $\hat{K}$ und $\hat{Q}$ lautet:

$$|Q_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{l=0}^{n} e^{-\frac{2\pi i}{n+1} jl} |K_l\rangle \ .$$

Das System sei in dem Zustand

$$|\psi\rangle = \sum_{m=0}^{n} c_m |K_m\rangle \quad \text{mit} \quad c_m = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b+1}} & \text{falls } m \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

präpariert.

a) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
   i) Messung eines Zustandes $|K_p\rangle$,
   ii) Messung eines $|K_p\rangle$ wobei $r \leq p \leq r+s$. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $\hat{K}$ im Zustand $|\psi\rangle$. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $|Q_p\rangle$ zu messen

$$p(Q_p) = \frac{1}{(n+1)(b+1)} \frac{\sin^2\left(\frac{p\pi(b+1)}{n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{p\pi}{n+1}\right)}$$

   lautet. **Hinweis:** Nutzen Sie die Partialsumme der geometrischen Reihe.
   Zeichnen Sie das Ergebnis für einen festen Wert von n und verschiedene b. Vergleichen Sie die Breiten der Verteilungen $p(K_p)$ und $p(Q_p)$. *(2 Punkte)*

d) Berechnen Sie nun die Wahrscheinlichkeit $|Q_p\rangle$ nach einer nicht-selektiven Messung von $\hat{K}$ zu messen. *(1 Punkt)*