Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III LAG
(Quantenmechanik und statistische Mechanik)

SoSe 2014 **Blatt 6** **22.05.2014**

Aufgabe 16 *Gaußsches Wellenpaket*

Gegeben sei der Zustand $|\varphi\rangle$ eines *freien* Teilchens, dessen Wellenfunktion in der Ortsdarstellung

$$\varphi(x) = \langle x|\varphi\rangle = N e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{i p_0 x}{\hbar}}$$

lautet. N sei hierbei eine Normierungskonstante.

a) Bestimmen Sie N. **Hinweis:** $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \exp\left(-\alpha x^2\right) = \sqrt{\pi/\alpha}$ *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie, dass die Impulsdarstellung von $|\varphi\rangle$ durch

$$\tilde{\varphi}(p) = \langle p|\varphi\rangle = \left(\frac{\sigma^2}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{(p-p_0)^2\sigma^2}{2\hbar^2}}$$

gegeben ist. *(2 Punkte)*

c) Bestimmen Sie $\langle\hat{p}\rangle$, $\langle\hat{p}^2\rangle$ und Δp im Zustand $|\varphi\rangle$. *(1 Punkt)*

d) Vergleichen Sie $\varphi(x)$ mit den Eigenzuständen des Ortsoperators $\hat{x}$ in Ortsdarstellung. Diskutieren Sie den Grenzübergang $\sigma \to 0$. *(1 Punkt)*

Aufgabe 17 *Der Impulsoperator*

a) Zeigen Sie in der Ortsdarstellung, dass $\hat{p}$ ein hermitescher Operator ist. *(1 Punkt)*

b) Beweisen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \, \tilde{\psi}^*(p) \, p \, \tilde{\psi}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \psi^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) \ ,$$

wobei $\psi(x)$ die inverse Fourier-Transformierte von $\tilde{\psi}(p)$ ist. *(2 Punkte)*

Aufgabe 18 *Ortsmessung*

Wir betrachten nun die Wellenfunktion

$$\chi(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

a) Zeigen Sie, dass diese Wellenfunktion normiert ist. *(1 Punkt)*

b) Weisen Sie nach, dass $\langle \hat{x} \rangle$ und $\langle \hat{x}^2 \rangle$ in diesem Zustand nicht existieren. *(1 Punkt)*

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit einen Ort zwischen x_1 und x_2 zu messen. *(1 Punkt)*

Aufgabe 19 *Ortseigenfunktionen im Impulsraum*

a) Leiten Sie aus der Eigenwertgleichung des Ortsoperators $\hat{x}$ seine Eigenzustände im Impulsraum her. **Hinweis:** Multiplizieren Sie beide Seiten mit $\langle p|$ und lösen Sie die Differentialgleichung. *(1 Punkt)*

b) Im Ortsraum lautet die Eigenwertgleichung

$$\hat{x}\varphi_{x_0}(x) = x_0 \varphi_{x_0}(x) \ .$$

Bestimmen Sie daraus die Eigenfunktionen $\varphi_{x_0}(x)$. Führen Sie die Fourier-Transformation des Ergebnisses aus a) durch und vergleichen Sie dies mit $\varphi_{x_0}(x)$. *(1 Punkt)*

Aufgabe 20 *Zustände minimaler Unschärfe*

In der Vorlesung haben Sie die Unschärferelation

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

hergeleitet.

a) Formulieren Sie die Bedingungen für die Gleichheit als Differentialgleichung und bestimmen Sie deren Lösung. Diese stellen Wellenfunktionen minimaler Unschärfe im Ortsraum dar. *(2 Punkte)*

b) Schließen Sie mit Hilfe von Aufgabe 1 auf die zugehörige Wellenfunktion im Impulsraum. Skizzieren Sie sowohl Realteil als auch Betragsquadrat der Wellenfunktionen in beiden Räumen. *(1 Punkt)*