Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III LAG
(Quantenmechanik und statistische Mechanik)

SoSe 2014 **Blatt 7** **29.05.2014**

Aufgabe 21 *Zeitentwicklung freier Wellenpakete*

Ein *freies* Teilchen der Masse m sei bei $t=0$ im Zustand $|\psi(t=0)\rangle$.

a) Nutzen Sie den Zeitentwicklungsoperator, um

$$|\psi(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\; e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t}\,\tilde{\psi}(p,t=0)\,|p\rangle$$

zu zeigen, wobei $\tilde{\psi}(p,t=0) = \langle p|\psi(t=0)\rangle$. *(1 Punkt)*

b) Als $|\psi(t=0)\rangle$ wählen wir nun das gaußsche Wellenpaket

$$\psi(x,t=0) = (2\pi)^{-1/4}\,\frac{1}{\sqrt{\Delta x}}\,e^{-\frac{(x-\langle\hat{x}\rangle)^2}{4\Delta x^2}}\,e^{\frac{i}{\hbar}\langle\hat{p}\rangle(x-\langle\hat{x}\rangle)}$$

mit der Impulsdarstellung

$$\tilde{\psi}(p,t=0) = (2\pi)^{-1/4}\,\frac{1}{\sqrt{\Delta p}}\,e^{-\frac{(p-\langle\hat{p}\rangle)^2}{4\Delta p^2}}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\langle\hat{x}\rangle p}$$

aus Aufgabe 20. Berechnen Sie die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ zum Zeitpunkt t. Nutzen Sie die Abkürzung $\langle\hat{x}\rangle(t) := \langle\hat{x}\rangle + \langle\hat{p}\rangle t/m$ und die Beziehung $\Delta x\cdot\Delta p = \hbar/2$. *(2 Punkte)*

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x,t)|^2$ unter Verwendung der Definition $\Delta x(t) := \sqrt{\Delta x^2 + \Delta p^2 t^2/m^2}$. *(1 Punkt)*

d) Geben Sie $\tilde{\psi}(p,t)$ und $|\tilde{\psi}(p,t)|^2$ an. *(1 Punkt)*

e) Skizzieren Sie $|\psi(x,t)|^2$ und $|\tilde{\psi}(p,t)|^2$ für $t=0$ sowie $t>0$. Vergleichen Sie $\langle\hat{x}\rangle(t)$ mit der klassischen Trajektorie eines freien Teilchens. Diskutieren Sie weiterhin die Zeitentwicklung der Breite des Wellenpaketes und zeigen Sie, dass die Unschärferelation $\Delta x(t)\cdot\Delta p(t) \geq \hbar/2$ erfüllt ist. *(1 Punkt)*