# Übung zur Vorlesung
# Theoretische Physik III LAG
# (Quantenmechanik und statistische Mechanik)

**SoSe 2014** **Blatt 9** **16.06.2014**

## Aufgabe 25 *Kohärente Zustände*

a) Zeigen Sie, dass kohärente Zustände des harmonischen Oszillators die Eigenwertgleichung

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

erfüllen. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie, dass zwei kohärente Zustände $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ nicht orthogonal sind, sondern

$$\langle\beta|\alpha\rangle = e^{\alpha\beta^* - \frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2}} \quad \text{und damit} \quad |\langle\beta|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2}$$

gilt. *(1 Punkt)*

c) Berechnen Sie $\langle\hat{x}\rangle$, $\langle\hat{x}^2\rangle$, $\Delta\hat{x}$, $\langle\hat{H}\rangle$, $\langle\hat{H}^2\rangle$ und $\Delta\hat{H}$ im Zustand $|\alpha\rangle$.
Erinnerung: $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$. *(1 Punkt)*

d) Lösen Sie die Eigenwertgleichung aus a) noch einmal in Ortsdarstellung. Dies sollte auf

$$\langle x|\alpha\rangle = \varphi_\alpha(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x-\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\mathrm{Re}(\alpha)\right)^2} e^{i\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\mathrm{Im}(\alpha)x}$$

führen. Vergleichen Sie dies mit Ergebnissen früherer Aufgaben. *(1 Punkt)*

## Aufgabe 26 *Schrödingers Katzenzustände*

Wir betrachten den Zustand $|\psi(t{=}0)\rangle = \mathcal{N}\big(|\alpha\rangle + |{-\alpha}\rangle\big)$.

a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante $\mathcal{N}$. *(1 Punkt)*

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, den Zustand $|n\rangle$ zu messen. *(1 Punkt)*

c) Berechnen und zeichnen Sie $|\psi(x, t{=}0)|^2$. *(1 Punkt)*

d) Bestimmen Sie $|\psi(t)\rangle$ für $t > 0$. *(1 Punkt)*

## Aufgabe 27 *Der Verschiebeoperator*

Nutzen Sie die Identität

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[\hat{A},\hat{B}]_n \quad \text{mit} \quad [\hat{A},\hat{B}]_n = [\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]_{n-1}] \quad \text{und} \quad [\hat{A},\hat{B}]_0 = \hat{B}\ ,$$

um die folgende beiden Relationen für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ und den Verschiebeoperator $\hat{D}(\alpha) = \exp\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right)$ zu beweisen:

$$\hat{D}(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha)^\dagger = \hat{a} - \alpha \quad \text{und} \quad \hat{D}(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{D}(\alpha)^\dagger = \hat{a}^\dagger - \alpha^*\ .$$

Diese Relationen werden in der folgenden Aufgabe benötigt. *(1 Punkt)*

**Aufgabe 28** *Gefangenes magnetisches Moment*

Ein Teilchen der Masse $m$ mit dem magnetischen Moment $\vec{\hat{\mu}} = \kappa\vec{\hat{\sigma}}$, mit einer Konstanten $\kappa$, befindet sich im Potential $V(z) = m\nu z^2/2$. Wir betrachten nur die Bewegung in $z$-Richtung. Zusätzlich liegt das Magnetfeld $\vec{B} = B_0\vec{e}_z + B_1 z\vec{e}_z$ an. Das System besteht damit aus zwei Zustandsräumen, dem der Bewegung (B) und dem des magnetischen Momentes ($\mu$). Ein allgemeiner Zustand hat also die Form $|\Phi\rangle = |\phi\rangle_\mathrm{B}|\psi\rangle_\mu$. Der Hamiltonoperator lautet

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_z^2}{2m} + \frac{m\nu^2\hat{z}^2}{2} - \kappa B_0\hat{\sigma}_z - \kappa B_1\hat{\sigma}_z\hat{z} \; ,$$

wobei der letzte Term beide Räume miteinander koppelt.

a) Führen Sie Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ ein, um $\hat{H}$ als

$$\hat{H} = \hbar\nu\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar\omega}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\eta\hat{\sigma}_z\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right)$$

zu schreiben. Geben Sie dabei $\omega$ und $\eta$ an. *(1 Punkt)*

b) Es soll nun eine unitäre Transformation $\hat{U}$ angewendet werden, um beide Teilsysteme zu entkoppeln. Führen Sie also die Transformation

$$\tilde{\hat{H}} = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger \quad \text{mit} \quad \hat{U} = e^{\lambda\hat{\sigma}_z\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right)}$$

aus und wählen Sie $\lambda$ so, dass in $\tilde{\hat{H}}$ der Kopplungsterm nicht mehr auftaucht. Identifizieren Sie dazu $\hat{U}$ mit einem Verschiebeoperator und verwenden Sie die Relationen aus der vorherigen Aufgabe. Als Ergebnis sollten Sie

$$\tilde{\hat{H}} = \hbar\nu\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar\omega}{2}\hat{\sigma}_z - \frac{\hbar\eta^2}{\nu}$$

erhalten. *(2 Punkte)*

c) Finden Sie die Eigenwerte $E_{n,\pm}$ und zugehörigen Eigenzustände $|\tilde{\Phi}_{n,\pm}\rangle = |\tilde{\phi}_{n,\pm}\rangle_\mathrm{B}|\tilde{\psi}_{n,\pm}\rangle_\mu$ von $\tilde{\hat{H}}$. Machen Sie dann die Rücktransformation und zeigen Sie, dass

$$|\Phi_{n,\pm}\rangle = \hat{D}(\mp\tfrac{\eta}{\nu})|n\rangle_\mathrm{B}|\pm\rangle_\mu$$

die Eigenzustände von $\hat{H}$ zu den Eigenwerten

$$E_{n,\pm} = \hbar\nu\left(n + \frac{1}{2}\right) \pm \frac{\hbar\omega}{2} - \frac{\hbar\eta^2}{\nu}$$

sind. *(2 Punkte)*