Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III LAG
(Quantenmechanik und statistische Mechanik)

SoSe 2014 **Blatt 10** **26.06.2014**

Aufgabe 29 *Der Dichteoperator*

a) Zeigen Sie, dass der Dichteoperator $\hat{\rho}$ folgende Eigenschaft hat:

$$\mathrm{Sp}(\hat{\rho}^2) \begin{cases} = 1, & \text{für einen reinen Zustand} \\ < 1, & \text{für einen gemischten Zustand} \end{cases}$$

(2 Punkte)

b) Welche dieser Operatoren stellen Dichteoperatoren dar? Im Falle von Dichteoperatoren: beschreiben sie reine oder gemischte Zustände?

$$\hat{\sigma}_x,\ \frac{1}{3}|+_z\rangle\langle+_z| + \frac{2}{3}|-_z\rangle\langle-_z|,\ \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1/4 & e^{i\pi/3} \\ e^{i\pi/3} & 3/4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1/2 & i/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

(2 Punkte)

Aufgabe 30 *Dichteoperatoren und Mittelwerte*

a) Berechnen Sie den Mittelwert $\langle\hat{\sigma}_z\rangle$ in den beiden Zuständen $\hat{\rho}_1$ und $\hat{\rho}_2$, die durch

$$\hat{\rho}_1 = |+_x\rangle\langle+_x| \quad \text{und} \quad \hat{\rho}_2 = \tfrac{3}{4}\,|+_z\rangle\langle+_z| + \tfrac{1}{4}\,\hat{\rho}_1$$

gegeben sind. *(1 Punkt)*

b) Bestimmen Sie für den Dichteoperator

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta x} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' \mathrm{d}x'' \exp\left(-\frac{(x'-d)^2 + (x''-d)^2}{4\Delta x^2}\right) |x'\rangle\langle x''|$$

den Mittelwert des Ortsoperators $\hat{x}$. *(1 Punkt)*

Aufgabe 31 *Drehimpulsoperatoren*

Verwenden Sie die Drehimpulsalgebra

$$[\hat{L}_\alpha, \hat{L}_\beta] = i\hbar \sum_\gamma \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{L}_\gamma$$

um die folgenden Aufgaben zu lösen.

a) Zeigen Sie, dass das Quadrat des Drehimpulsoperators mit jeder seiner Komponenten vertauscht: $[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_\alpha] = 0$ für $\alpha = x, y, z$. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie das Produkt $\hat{L}_\pm \hat{L}_\mp$ und damit den Kommutator $[\hat{L}_\pm, \hat{L}_\mp]$. *(1 Punkt)*

c) Berechnen Sie $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm]$ und $[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_\pm]$. *(1 Punkt)*

Aufgabe 32 *Quantenmechanischer Kreisel*

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich mit einem *festen* Abstand r um den Ursprung. Der Hamiltonoperator kann als

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{L}}^2}{2mr^2}$$

geschrieben werden. Dabei ist $\hat{\vec{L}}$ der Drehimpulsoperator. Wegen dem festen Abstand hängt die Wellenfunktion $\psi(\theta, \varphi)$ nur von von den Winkeln $\theta \in [0, \pi]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ ab.

a) Welche Energien können gemessen werden und wie lauten die zugehörigen Eigenzustände? Skizzieren Sie die Energien und geben Sie deren Entartungsgrad an. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte der Drehimpulsoperatoren $\langle \hat{\vec{L}}^2 \rangle$, $\langle \hat{L}_z \rangle$ und $\langle \hat{L}_x \rangle$ im Zustand $|l=1, m=\pm 1\rangle$. *(1 Punkt)*

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit das Teilchen im Zustand $|l=1, m=0\rangle$ im Raumwinkelbereich mit $0 \leq \theta \leq \pi/3$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ zu finden. *(1 Punkt)*