Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III LAG
(Quantenmechanik und statistische Mechanik)

SoSe 2014 **Blatt 11** **03.07.2014**

Aufgabe 33 *Die n-dimensionale Kugel*

Das Volumen $V_n(R)$ einer n-dimensionalen Kugel mit Radius R lässt sich über das Integral

$$V_n(R) = \int \mathrm{d}V_n = \int \mathrm{d}x_1 \int \mathrm{d}x_2 \ldots \int \mathrm{d}x_n$$

berechnen. Dabei stellt $\mathrm{d}V_n$ das n-dimensionale Volumenelement in Kugelkoordinaten dar und für Punkte innerhalb des Kugelvolumens gilt $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq R^2$.

a) Zeigen Sie anhand des obigen Integrals, dass

$$V_n(R) = V_n(1) R^n$$

gilt, wobei $V_n(1)$ das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel ist. *(1 Punkt)*

b) Geben Sie mit Hilfe von a) das Volumenelement $\mathrm{d}V_n$ in Abhängigkeit von $V_n(1)$ an. Wie berechnet man daraus $V_n(R)$ und was bedeutet der R-unabhängige Teil? *(1 Punkt)*

c) Um $V_n(1)$ konkret zu bestimmen soll das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_n \, e^{-\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)}$$

berechnet werden. Tun Sie dies einmal in kartesischen und einmal in Kugelkoordinaten und drücken Sie $V_n(1)$ durch die Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}t \, e^{-t} t^{x-1}$$

aus. *(2 Punkte)*

d) Zeigen Sie abschließend, dass das Volumen der n-dimensionalen Kugel durch

$$V_n(R) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} R^n}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

gegeben ist, indem Sie die Eigenschaft

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$$

nutzen. *(1 Punkt)*