Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III

SoSe 2015 **Blatt 10** **09.07.2015**

Aufgabe 31 *Teilchen im Potential $V(x)$*

Gegeben seien der Zustandsraum $\mathscr{E}$ und die Operatoren $\hat{x}$ und $\hat{p}$, die $[\hat{x}, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar\hat{\mathbb{1}}$ erfüllen.

a) Zeigen Sie

$$[\hat{x}, f(\hat{p})] = \mathrm{i}\hbar \left.\frac{\partial f}{\partial p}\right|_{p=\hat{p}} \tag{1}$$

und

$$[\hat{p}, V(\hat{x})] = -\mathrm{i}\hbar \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}} \tag{2}$$

wobei $f(p)$ und $V(x)$ analytisch sind für alle Werte von x und p in $\mathbb{R}$. *(1 Punkt)*

b) Nutzen Sie Gl. (1) und Gl. (2) um die Bewegungsgleichung eines Teilchens im Potential $V(\hat{x})$ forml zu lösen, dessen Hamiltonoperator durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \tag{3}$$

gegeben ist. *(1 Punkt)*

Aufgabe 32 *Kohärente Zustände*

Gegeben sei der kohärente Zustand

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \,, \tag{4}$$

der $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ erüllt. Hierbei seien $|n\rangle$ die Fockzustände.

a) Bestimmen Sie die Ortsdarstellung von $|\alpha\rangle$:

$$\psi_{\mathrm{coh}}(x) = \langle x|\alpha\rangle \,. \tag{5}$$

Hinweis: Sie können die Erzeugendefunktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(\xi) = \exp\left(-z^2 + 2\xi z\right) \tag{6}$$

benutzen, wobei z eine komplexe Variable ist und $H_n(\xi)$ die Hermitepolynome darstellen. Alternativ können Sie $\langle x|\,\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,\langle x|\alpha\rangle$ mit

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\hat{p} \,. \tag{7}$$

benutzen. *(1 Punkt)*

b) $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ seien zwei kohärenten Zustände. Zeigen Sie

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)+\alpha^*\beta} . \tag{8}$$

(1 Punkt)

Aufgabe 33 *Anharmonizität der Schwingung eines polaren Moleküls*

Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 , \tag{9}$$

der durch das anharmonische Potential

$$V(\hat{x}) = \lambda\hbar\omega\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}}\hat{x}^3, \tag{10}$$

gestört ist wobei λ einen reellen, dimensionslosen Parameter darstellt mit $\lambda \ll 1$.

a) Zeigen Sie

$$V(\hat{x}) = \frac{\lambda\hbar\omega}{2^{3/2}}\left[(\hat{a}^\dagger)^3 + \hat{a}^3 + 3\hat{N}\hat{a}^\dagger + 3(\hat{N}+1)\hat{a}\right] , \tag{11}$$

wobei $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ den Erzeugungs-, Vernichtungs- und Anzahloperator des harmonischen Oszillators darstellen. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie die Energien und Eigenzustände des gestörten harmonischen Oszillators bis zur zweiten Ordnung der Störungstheorie im Parameter λ. *(2 Punkte)*

Aufgabe 34 *Rabi Oszillationen*

Betrachten Sie ein Zwei-Niveau-System mit Grundzustand $|g\rangle$ und angeregtem Zustand $|e\rangle$ dessen Hamiltonoperator durch

$$\hat{H} = \hbar\omega_0\frac{\sigma_z}{2} + \hbar\Omega\sigma_x. \tag{12}$$

gegeben ist (Vergleich: Übungsblatt 7, Aufgabe 23). Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das System im normierten Zustand $|\psi(0)\rangle = \alpha(0)|e\rangle + \beta(0)|g\rangle$.

a) Lösen Sie die Schrödingergleichung

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle \tag{13}$$

exakt. *(2 Punkte)*

b) Nehmen Sie nun an Ω sei eine Störung und der Anfangszustand sei $|\psi(0)\rangle = |g\rangle$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit das System nach einer Zeit τ im Zustand $|e\rangle$ zu finden mit zeitabhängiger Störungstheorie. *(1 Punkt)*

c) Vergleichen Sie das Ergebnis der Störungsrechnung mit dem exakten Ergebnis und geben Sie an wann es gültig ist. *(1 Punkt)*