Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III

SoSe 2015 **Blatt 11** **16.07.2015**

Aufgabe 35 *Geladener harm. Oszillator in variablem elektrischem Feld*

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator besteht aus einem Teilchen der Masse m und Ladung q im Potential $V(\hat{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$. Wir nehmen an, dass sich das Teilchen in einem zeitabhängigen elektrischen Feld $E(t)$ parallel zur x-Achse befindet, so dass zu $V(\hat{x})$ die potentielle Energie

$$\hat{W}(t) = -qE(t)\hat{x} \tag{1}$$

hinzugefügt werden muss. $|\psi(0)\rangle$ sei der Zustand des Systems zum Zeitpunkt $t = 0$.

a) Schreiben Sie den Hamiltonoperator $\hat{H}(t)$ des Teilchens unter Verwendung der Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ (Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren des harmonischen Oszillators). Berechnen Sie die Kommutatoren von $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ mit $\hat{H}(t)$. *(1 Punkt)*

b) Die Zahl $\alpha(t)$ sei durch

$$\alpha(t) = \langle\psi(t)|\,\hat{a}\,|\psi(t)\rangle \tag{2}$$

definiert, wobei $|\psi(t)\rangle$ der normierte Zustand zum Zeitpunkt t ist. Nutzen Sie a) um zu zeigen, dass $\alpha(t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha(t) = -\mathrm{i}\omega\alpha(t) + \mathrm{i}\lambda(t) \tag{3}$$

mit

$$\lambda(t) = \frac{q}{\sqrt{2m\hbar\omega}}E(t) \tag{4}$$

genügt und integrieren Sie diese Differentialgleichung. Geben Sie die Erwartungswerte von Ort und Impuls zum Zeitpunkt t an. *(1 Punkt)*

c) Der Ket $|\phi(t)\rangle$ ist durch

$$|\phi(t)\rangle = (\hat{a} - \alpha(t))|\psi(t)\rangle \tag{5}$$

definiert, wobei $\alpha(t)$ in b) bestimmt wurde. Nutzen Sie die Ergebnisse aus a) und b) um zu zeigen, dass die Zeitentwicklung $|\phi(t)\rangle$ durch

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\phi(t)\rangle = (\hat{H}(t) + \hbar\omega)|\phi(t)\rangle \tag{6}$$

gegeben ist. Wie ändert sich die Form von $|\phi(t)\rangle$ mit der Zeit? *(1 Punkt)*

d) Nehmen Sie an dass $|\psi(0)\rangle$ ein Eigenvektor von $\hat{a}$ mit dem Eigenwert $\alpha(0)$ ist. Zeigen Sie dass $|\psi(t)\rangle$ ebenfalls Eigenvektor von $\hat{a}$ ist und berechnen Sie den Eigenwert. Finden Sie den Erwartungswert des ungestörten Hamiltonoperators

$$\hat{H}_0 = \hat{H}(t) - \hat{W}(t) \tag{7}$$

zur Zeit t als Funktion von $\alpha(0)$. Geben Sie die mittleren quadratischen Abweichungen

$$\Delta x = \sqrt{\langle\hat{x}^2\rangle_t - \langle\hat{x}\rangle_t^2}, \quad \Delta p = \sqrt{\langle\hat{p}^2\rangle_t - \langle\hat{p}\rangle_t^2}, \quad \Delta H_0 = \sqrt{\langle\hat{H}_0^2\rangle_t - \langle\hat{H}_0\rangle_t^2} \tag{8}$$

an. Wie ändern sich diese mit der Zeit? *(2 Punkte)*

e) Nehmen Sie an, dass der Oszillator zur Zeit $t = 0$ im Grundzustand $|\phi_0\rangle$ des harmonischen Oszillators ist. Das elektrische Feld wirke nur zwischen den Zeiten 0 und T und ist danach gleich Null. Wie lautet die Zeitentwicklung der Erwartungswerte $\langle \hat{x} \rangle_t$ und $\langle \hat{p} \rangle_t$ für $t > T$? Anwendung: Nehmen Sie an zwischen 0 und T sei das Feld durch $E(t) = E_0 \cos(\omega' t)$ gegeben. Diskutieren Sie beobachteten Phenomene (Resonanz) im Bezug auf $\Delta\omega = \omega' - \omega$. Wenn für $t > T$ die Energie gemessen wird, welche Ergebnisse sind möglich und wie sind die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten? *(2 Punkte)*

Aufgabe 36 *Drehimpuls*

Betrachten Sie ein System mit dem Drehimpuls $l = 1$. Eine Basis des Zustandsraums ist durch die drei Eigenvektoren von $\hat{L}_z$, $|+1\rangle, |0\rangle$ und $|-1\rangle$, gegeben, deren Eigenwerte $+\hbar, 0$ und $-\hbar$ lauten. Sie erfüllen

$$\begin{aligned} \hat{L}_\pm |m\rangle &= \hbar\sqrt{2}|m \pm 1\rangle\,, \\ \hat{L}_+|1\rangle &= \hat{L}_-|-1\rangle = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

mit $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm \mathrm{i}\hat{L}_y$. Das System, das ein elektrisches Quadrupolmoment besitzt, befindet sich in einem elektrischen Feldgradienten, sodass der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\omega_0}{\hbar}(\hat{L}_u^2 - \hat{L}_v^2) \tag{10}$$

lautet, dabei sind $\hat{L}_u$ und $\hat{L}_v$ die Komponenten von $\hat{\boldsymbol{L}}$ entlang der zwei Richtungen Ou und Ov in der xOz-Ebene die jeweils einen Winkel von 45° mit Ox und Oz einschließen. ω_0 ist eine reelle Konstante.

a) Schreiben Sie die Matrix, die $\hat{H}$ in der $\{|+1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$ Basis darstellt. Was sind die stationären Zustände des Systems und wie lauten deren Energien? (Schreiben Sie die Zustände als $|E_1\rangle, |E_2\rangle$ und $|E_3\rangle$ mit absteigenden Energien.) *(2 Punkte)*

b) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das System im Zustad

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1\rangle - |-1\rangle)\,. \tag{11}$$

Geben Sie den Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle$ zur Zeit t an. Nehmen Sie an, dass zum Zeitpunkt t die Drehimpulskomponente $\hat{L}_z$ gemessen wird. Wie lauten die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Messwerte? *(1 Punkt)*

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{L}_x \rangle_t, \langle \hat{L}_y \rangle_t$ und $\langle \hat{L}_z \rangle_t$ zur Zeit t. Welche Bewegung beschreibt der Vektor $\langle \hat{\boldsymbol{L}} \rangle_t$? *(1 Punkt)*

d) Zur Zeit t wir eine Messung von $\hat{L}_z^2$ durchgeführt.

1. Finden Sie heraus, ob Zeiten t existieren, zu denen nur ein einziges Messergebnis möglich ist.
2. Nehmen Sie an die Messung ergab den Messwert $\hbar^2$. Wie lautet der Zustand des Systems unmittelbar nach der Messung? Argumentieren Sie ohne Rechnung wie die weitere Zeitentwicklung aussieht.

(1 Punkt)