Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III

SoSe 2015 **Blatt 12** **21.07.2015**

Aufgabe 37 *Addition von Drehimpulsen*

Wir betrachten eine System von zwei Teilchen. Jedes Teilchen habe den Spin $\frac{1}{2}$ und wir bezeichnen mit $\hat{\boldsymbol{s}}_i$ $(i = 1, 2)$ den Spin des i-ten Teilchens. Die beiden Teilchen wechselwirken mit einem Magnetfeld entlang der z-Achse: $\boldsymbol{B} = B_0 \boldsymbol{e}_z$. Der Hamiltonoperator des Systems lautet

$$\hat{H}_0 = -\boldsymbol{B} \cdot (\hat{\boldsymbol{s}}_1 + \hat{\boldsymbol{s}}_2)\,. \tag{1}$$

a) Finden Sie zwei vollständige Sätze kommutierender Operatoren und geben Sie jeweils deren Eigenbasis an. Bestimmen Sie den Entartungsgrad der Energien. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie die Zeitentwicklung $|\psi\rangle_t$ des Anfangszustandes

$$|\psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|m_1 = \frac{1}{2}\rangle_x \otimes |m_2 = -\frac{1}{2}\rangle_x - |m_1 = -\frac{1}{2}\rangle_x \otimes |m_2 = \frac{1}{2}\rangle_x \right) \tag{2}$$

wobei $|m_i = \pm\frac{1}{2}\rangle_x$ Eigenzustände der x-Komponente des Spins des i-ten Teilchens sind $(\hat{s}_{ix})$. *(1 Punkt)*

c) Betrachten Sie den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \alpha \hat{\boldsymbol{s}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{s}}_2 \tag{3}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\alpha > 0$. Bestimmen Sie einen vollständigen Satz kommutierender Operatoren und geben Sie dessen Eigenbasis an. Bestimmen Sie den Entartungsgrad. Geben Sie das Einwertspektrum an und berechnen Sie die Zeitentwicklung $|\psi\rangle_t$ des Anfangszustands $|\psi\rangle_0$ aus Gl. (**??**). *(1 Punkt)*

Aufgabe 38 *Dreidimensionaler harm. Oszillator in konstantem Magnetfeld*

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse μ in einem isotropen dreidimensionalen harmonischen Potential dessen Hamiltonoperator durch

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega_0^2 \hat{\boldsymbol{r}}^2 \tag{4}$$

gegeben ist, wobei ω_0 eine relle Konstannte darstellt.

a) Finden Sie die Energieniveaus des Teilchens und deren Entartungsgrad. Ist es möglich eine gemeinsame Eigenbasis von $\hat{H}_0, \hat{\boldsymbol{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ zu finden? *(1 Punkt)*

b) Nehmen Sie an das Teilchen habe eine Ladung q und befinde sich im konstanten Magnetfeld $\boldsymbol{B} = B_0 \boldsymbol{e}_z$ parallel zur z-Achse. Mit der Definition $\omega_L = -\frac{qB_0}{2\mu}$ lautet der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = H_0 + \frac{1}{2}\mu\omega_L^2(x^2 + y^2) + \omega_L \hat{L}_z \,. \tag{5}$$

Der zu $\omega_L$proportionale Anteil heisst paramagnetischer Term, während der zu ω_L^2 proportionale Anteil diamagnetischer Term genannt wird. Zeigen Sie, dass die stationären Zustände des Systems genau bestimmt werden können. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie, dass die Wirkung des diamagnetischen Terms im Vergleich zum paramagnetischen Term vernachlässigt werden kann, falls ω_L viel kleiner as ω_0 ist. *(1 Punkt)*

d) Wir betrachten den ersten angeregten Zustand des Oszillators, d.h. den Zustand dessen Energie sich $5\hbar\omega_0/2$ nähert für $\omega_L \to 0$. Wie lauten die Energieniveaus in Gegenwart von $\boldsymbol{B}$ und deren Entartungsgrad (Zeemaneffekt des dreidimensionalen harmonischen Oszillators) in erster Ordnung von ω_L/ω_0? Geben Sie das Gleiche für den zweiten angeregten Zustand an. *(1 Punkt)*

e) Betrachten Sie zuletzt den Grundzustand. Wie ändert sich dessen Energie in Abhängigkeit von ω_L (diamagnetischer Effekt des Grundzustands)? Berechnen Sie die magnetische Suszeptibilität χ dieses Zustands. Ist der Grundzustand in Anwesenheit von $\boldsymbol{B}$ ein Eigenzustand von $\hat{\boldsymbol{L}}^2$, $\hat{L}_z$ und $\hat{L}_x$?
Hinweis: Die magnetische Suszeptibilität ist durch

$$\chi = -\frac{\partial^2 E_0(B_0)}{\partial B_0^2} \tag{6}$$

definiert. *(1 Punkt)*

Aufgabe 38 *Wasserstoffatom*

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom im Magnetfeld $\boldsymbol{B} = B_0 \boldsymbol{e}_z$ parallel zur z-Achse. Der Hamiltonoperator lautet

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{\mu_B}{\hbar}\hat{\boldsymbol{L}} \cdot \boldsymbol{B} \tag{7}$$

wobei $\hat{\boldsymbol{L}}$ der Drehimpulsoperator ist. $\hat{H}_0$ sei der ungestörte Hamiltonoperator des Atoms und μ_B das Bohrsche Magneton. Bestimmen Sie das Energiespektrum und die Eigenzustände des Systems. Berechnen Sie explizit die Energie des Grundzustands und des ersten angeregten Zustands und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem ungestörten Wasserstoffatom. *(2 Punkte)*