Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III

SoSe 2015 **Blatt 2** **11.05.2015**

Aufgabe 7 *Nicht hermitesche Operatoren*

a) Sie wissen, dass zwei Eigenkets $|a_1\rangle$ und $|a_2\rangle$ eines hermiteschen Operators $\hat{A}$ zu den Eigenwerten $a_1 \neq a_2$ orthogonal sind, also $\langle a_1|a_2\rangle = 0$ gilt. Nehmen Sie nun an, dass $\hat{A}$ nicht hermitesch ist und den Eigenket $|a_2\rangle$ zum Eigenwert a_2 und Eigenbra $\langle a_1|$ zum Eigenwert $a_1 \neq a_2$ besitzt, also

$$\hat{A}|a_2\rangle = a_2|a_2\rangle\,, \quad \langle a_1|\hat{A} = a_1\langle a_1|$$

gilt. Zeigen Sie, dass $\langle a_1|a_2\rangle = 0$ immer noch erfüllt ist. *(1 Punkt)*

b) Der Operator $\hat{A}$ sei immer noch nicht hermitesch und habe den Eigenket $|a\rangle$ zum Eigenwert a. Zeigen Sie, dass $\langle a^*|$ ein Eigenbra von $\hat{A}^\dagger$ zum Eigenwert a^* ist. Wie steht $\langle a^*|$ mit $|a\rangle$ in Verbindung? Ist a notwendigerweise reell? *(1 Punkt)*

Aufgabe 8 *Funktionen von Pauli Operatoren*

a) Zeigen Sie, dass die Pauli Operatoren $\hat{\sigma}_j$ $(j = x, y, z)$ für $\forall n \in \mathbb{N}$ die Relation

$$\hat{\sigma}_j^n = \begin{cases} \hat{\sigma}_j\,, & \text{für ungerade } n \\ \hat{\mathbb{1}}_2\,, & \text{für gerade } n \end{cases}$$

erfüllen. *(1 Punkt)*

b) Die Funktion $f(x)$ habe im Punkt $x = 0$ die Taylor-Entwicklung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n\,.$$

Beweisen Sie für eine solche Funktion und die Pauli Operatoren die Beziehung

$$f(\hat{\sigma}_j) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}\hat{\mathbb{1}}_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}\hat{\sigma}_j\,. \tag{1}$$

Was können Sie damit allgemein über Funktionen von Pauli Operatoren sagen? *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie weiterhin

$$f(\hat{\sigma}_x)\hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_z f(-\hat{\sigma}_x)\,.$$

(1 Punkt)

d) Berechnen Sie Gl. (1) für $f(\hat{\sigma}_x) = \cos(\alpha\hat{\sigma}_x)$, $f(\hat{\sigma}_x) = \sin(\alpha\hat{\sigma}_x)$ und $f(\hat{\sigma}_x) = e^{\mathrm{i}\alpha\boldsymbol{u}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}}$ mit dem Pauli Vektor $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\sigma}_x\boldsymbol{e}_x + \hat{\sigma}_y\boldsymbol{e}_y + \hat{\sigma}_z\boldsymbol{e}_z$, dem Einheitsvektor $\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{e}_x + u_y\boldsymbol{e}_y + u_z\boldsymbol{e}_z$ $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = 1)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. *(2 Punkte)*

Aufgabe 9 *Eigenschaften der Spur*

Nehmen Sie an $\{|a_n\rangle\}$ ist eine vollständige, orthonormierte Basis, d.h. es gilt $\sum_n |a_n\rangle\langle a_n| = \hat{\mathbb{1}}_2$ und $\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{i,j}$. Desweiteren sei $\{|b_n\rangle\}$ eine Basis mit den selben Eigenschaften. Die beiden Basen könnten z.B. durch $\{|a_n\rangle\} = \{|\uparrow\rangle_x, |\downarrow\rangle_x\}$ und $\{|b_n\rangle\} = \{|\uparrow\rangle_z, |\downarrow\rangle_z\}$ gegeben sein.

a) Zeigen Sie, dass die Spur $\mathrm{Sp}\,(\hat{A})$ eines beliebigen Operators $\hat{A}$ nicht von der Wahl der Basis abhängig ist. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie, dass für die Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$

$$\mathrm{Sp}\,(\hat{A}\hat{B}) = \mathrm{Sp}\,(\hat{B}\hat{A}) \quad \text{und} \quad \mathrm{Sp}\,(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = \mathrm{Sp}\,(\hat{B}\hat{C}\hat{A})\,.$$

gilt. *(1 Punkt)*

Aufgabe 10 *Dichteoperatoren*

a) Zeigen Sie, dass der Dichteoperator eines Spins immer als

$$\hat{\rho} = a_0\hat{\mathbb{1}}_2 + \boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}} = a_0\hat{\mathbb{1}}_2 + \sum_{j=x,y,z} a_j\hat{\sigma}_j \tag{2}$$

geschrieben werden kann mit $a_0 \in \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Bedingungen an a_0 und $\boldsymbol{a}$ damit $\hat{\rho}$ einen Dichteoperator darstellt. *(2 Punkte)*

b) Nehmen Sie an $\hat{\rho}$ sei der Dichteoperator des Zustands

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die explizite Form von $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ und die Erwartungswerte von $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$ und $\hat{\sigma}_z$. Bringen Sie $\hat{\rho}$ in die Form von Gl. (2) und bestimmen Sie a_0 und $\boldsymbol{a}$. *(1 Punkt)*

c) Schreiben Sie den Dichteoperator eines unpolarisierten Strahls von Silberatomen und zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $|\uparrow\rangle$ oder $|\downarrow\rangle$ zu messen in jeder Richtung gleich ist. *(1 Punkt)*