Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III

SoSe 2015 **Blatt 5** **2.06.2015**

Aufgabe 14 *Hermitizität*

$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ seien Operatoren auf dem Raum $\mathscr{E}$ der Zustände eines Teilchens.

a) Zeigen Sie, dass jeder Operator $\hat{D}$ als Summe eines hermiteschen und eines anti-hermitesche Operators, d.h.

$$\hat{D} = \hat{D}_1 + \hat{D}_2 \tag{1}$$

geschrieben werden kann mit $\hat{D}_1 = \hat{D}_1^\dagger$ und $\hat{D}_2 = -\hat{D}_2^\dagger$. *(1 Punkt)*

b) Betrachten Sie den Operator

$$\hat{C} = \alpha\hat{A} + \beta\hat{B} \tag{2}$$

wobei $\hat{A}$ und $\hat{B}$ hermitesch sind. Unter welchen Bedingungen an α und β ist auch $\hat{C}$ hermitesch? *(1 Punkt)*

c) Betrachten Sie noch einmal den Operator aus Gl. (2) mit

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Welche Bedingungen müssen α und β nun erfüllen, damit $\hat{C}$ hermitesch ist? *(1 Punkt)*

d) Finden Sie für den Fall der vorangehenden Teilaufgabe ($\hat{C} = \hat{C}^\dagger$) die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\hat{C}$. *(1 Punkt)*

e) Geben Sie die unitäre Transformation an die $\hat{C}$ diagonalisiert. *(1 Punkt)*

f) Schreiben Sie die Matrizen, die die Projektion auf die Eigenvektoren beschreiben, und vergewissern Sie sich, dass diese die Orthogonalität und Vollständigkeit erfüllen. *(1 Punkt)*

Aufgabe 15 *Operatoren und Messung*

Betrachten Sie ein physikalisches System, das durch einen dreidimensionalen Zustandsraum beschrieben wird. $\mathcal{B} = \{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ sei eine orthonormale Basis des Zustandsraumes. Betrachten Sie den Zustand

$$|\psi\rangle = \alpha_1|u_1\rangle + \alpha_2|u_2\rangle + \alpha_3|u_3\rangle. \tag{4}$$

a) Bestimmen Sie die Bedingungen an α_i für die $|\psi\rangle$ normalisiert ist. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie den Dichteoperator von $|\psi\rangle$

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|\,.$$

in der Basis $\mathcal{B}$ und geben Sie seine Matrixdarstellung an. *(1 Punkt)*

c) Gegeben sei die Observable

$$\hat{A} = a\,|u_1\rangle\langle u_1| + a\,|u_2\rangle\langle u_2| + a'\,|u_3\rangle\langle u_3|\,. \tag{5}$$

Unter welchen Bedingungen für a und a' ist $\hat{A}$ hermitesch? *(1 Punkt)*

d) Eine Messung der Observablen $\hat{A}$ wird an dem Zustand $|\psi\rangle$ durchgeführt. Was ist der resultierende Zustand wenn das Messergebnis a' ist? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit a' zu messen? *(1 Punkt)*

e) Eine Messung der Observablen $\hat{A}$ wird an dem Zustand $|\psi\rangle$ durchgeführt. Was ist der resultierende Zustand wenn das Messergebnis a ist? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit a zu messen? *(1 Punkt)*

f) Betrachten Sie nun die Observable

$$\begin{aligned}\hat{B} = {} & b_{11}\,|u_1\rangle\langle u_1| + b_{22}\,|u_2\rangle\langle u_2| + b_{11}\,|u_3\rangle\langle u_3| + \\ & + b_{12}\,|u_1\rangle\langle u_2| + b_{21}\,|u_2\rangle\langle u_1| + b_{23}\,|u_2\rangle\langle u_3| + b_{32}\,|u_3\rangle\langle u_2|\,.\end{aligned} \tag{6}$$

Unter welchen Bedingungen an die b_{ij} ist $\hat{B}$ hermitesch? Berechnen Sie die Spur von $\hat{B}$. *(1 Punkt)*

g) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\hat{B}$ und schreiben Sie $|\psi\rangle$ in der Basis, in der $\hat{B}$ diagonal ist. *(1 Punkt)*

h) Welche Messwerte sind möglich und wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten diese bei einer Messung von $\hat{B}$ am Zustand $|\psi\rangle$ zu erhalten. *(1 Punkt)*

i) Berechnen Sie die Spur von $\hat{B}$ in seiner Diagonalform. Geben Sie die Projektoren auf die Eigenräume an und überprüfen Sie deren Orthogonalität und Vollständigkeit. *(1 Punkt)*

j) Nun sei $\hat{K}$ der Operator, der durch $\hat{K} = |\phi\rangle\langle\chi|$ definiert ist, wobei $|\phi\rangle$ und $|\chi\rangle$ zwei Zustände aus dem Zustandsraum sind. Unter welcher Bedingung ist $\hat{K}$ hermitesch? Berechnen Sie $\hat{K}^2$. Unter welcher Bedingung ist $\hat{K}$ ein Projektor? Zeigen Sie dass $\hat{K}$ immer in der Form $\hat{K} = \lambda P_1 P_2$ geschrieben werden kann, wobei λ eine Konstante darstellt und P_1 und P_2 Projektoren sind. *(1 Punkt)*

Aufgabe 16 *Paulioperatoren und Dichteoperatoren*

a) Zeigen Sie, dass alle Dichteoperatoren $\mathrm{Sp}\,(\hat{\rho}^2) \leq 1$ erfüllen. In welchem Fall gilt $\mathrm{Sp}\,(\hat{\rho}^2) = 1$? *(1 Punkt)*

b) Betrachten Sie nun ein Spinsystem. Wir definieren die vier hermiteschen Operatoren

$$\begin{aligned}&\hat{W}_0 = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbb{1}}_2 + \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right), \\ &\hat{W}_1 = \sigma_x \hat{W}_0 \sigma_x, \quad \hat{W}_2 = \sigma_y \hat{W}_0 \sigma_y, \quad \hat{W}_3 = \sigma_z \hat{W}_0 \sigma_z.\end{aligned} \tag{7}$$

Zeigen Sie dass diese auf Spur eins normiert sind, d.h. $\mathrm{Sp}\,(\hat{W}_i) = 1$ für $i = 0, \ldots, 3$ gilt, und dass sie orthogonal sind im Sinne von

$$\mathrm{Sp}\,(\hat{W}_i \hat{W}_j) = 2\delta_{ij}, \quad \text{für } i, j = 1, \ldots, 3. \tag{8}$$

(1 Punkt)

c) Zeigen Sie, dass diese $\hat{W}_i$ vollständig sind, d.h. dass jeder Operator $\hat{\Gamma}$ als gewichtete Summe der $\hat{W}_i$, also

$$\hat{\Gamma} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{3} \gamma_i \hat{W}_i, \quad \text{mit } \gamma_i = \mathrm{Sp}\,(\hat{W}_i \hat{\Gamma}) \tag{9}$$

geschrieben werden kann. Drücken Sie $\mathrm{Sp}\,(\hat{\Gamma})$ und $\mathrm{Sp}\,(\hat{\Gamma}^\dagger \hat{\Gamma})$ durch die Koeffizienten γ_i aus. *(1 Punkt)*

d) Wenn eine System durch den Dichteoperator $\hat{\rho} = \frac{1}{2} \sum_k r_k \hat{W}_k$ beschrieben werden kann, was ergibt sich dann für den Erwartungswert von $\hat{\Gamma}$ ausgedrückt durch die Koeffizienten γ_i und r_k? *(1 Punkt)*

Aufgabe 17 *Unitäre Operatoren*

Betrachten Sie den Zustandsraum $\mathscr{E}$ eines physikalschen Systems. Zwei Observablen sind durch die Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ mit $\hat{A}|a_j\rangle = a_j|a_j\rangle$ und $\hat{B}|b_j\rangle = b_j|b_j\rangle$ ($\hat{A}$ und $\hat{B}$ sind hermitesch) gegeben. Der Basiswechseloperator ist durch $\hat{U}_{ba} = \sum_{k=1}^{n} |b_k\rangle\langle a_k|$ gegeben.

a) Nehmen Sie an, dass $a_j = b_j$ für $j = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie dafür

$$\hat{B}\hat{U}_{ba} = \hat{U}_{ba}\hat{A}. \tag{10}$$

(1 Punkt)

b) Zeigen Sie für den gleichen Fall,dass auch

$$f(\hat{B})\hat{U}_{ba} = \hat{U}_{ba} f(\hat{A}) \tag{11}$$

gilt. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie, dass der Operator $\hat{U}_{ba}$ unitär ist. *(1 Punkt)*

d) Zeigen Sie, dass für jeden Operator $\hat{A}$, der eine Observable representiert, und jeden unitären Operator $\hat{U}$

$$\hat{U}^{-1} f(\hat{A}) \hat{U} = f(\hat{U}^{-1} \hat{A} \hat{U}) \tag{12}$$

erfüllt ist. *(1 Punkt)*