Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III

SoSe 2015 **Blatt 7** **16.06.2015**

Aufgabe 21 *Operatoren*

Betrachten Sie den Zustandsraum $\mathscr{E}$ eines physikalischen Systems und zwei Observablen, die durch die Operatoren $\hat{A} : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ und $\hat{B} : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ beschrieben werden.

a) Beweisen Sie die Relation ($l \in \mathbb{N}^+$)

$$[\hat{A}, \hat{B}^l] = \sum_{n=1}^{l} \hat{B}^{n-1}[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{l-n} = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{l-1} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{l-2} + \cdots + \hat{B}^{l-2}[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B} + \hat{B}^{l-1}[\hat{A}, \hat{B}]\,.$$

(1 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass der Operator

$$\hat{U} = \exp\left(\mathrm{i}\Theta\hat{A}\right)$$

für $\Theta \in \mathbb{R}$ unitär ist. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie, dass in einem *endlich* dimensionalen Zustandsraum keine Operatoren $\hat{O}_1$ und $\hat{O}_2$ existieren, die die Kommutatorrelation $[\hat{O}_1, \hat{O}_2] = \mathrm{i}\hbar$ erfüllen.
Hinweis: Benutzen Sie die Spur. *(1 Punkt)*

Aufgabe 22 *Endlicher Potentialtopf*

Gegeben sei der Hamiltonoperator

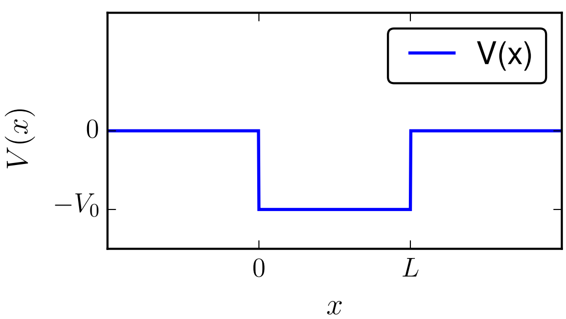
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$$

und $V_0 > 0$.

a) Bestimmen Sie die Eigenenergien und Eigenzustände für

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \text{ und } x > L \\ -V_0 & \text{für } 0 \le x \le L \end{cases}.$$

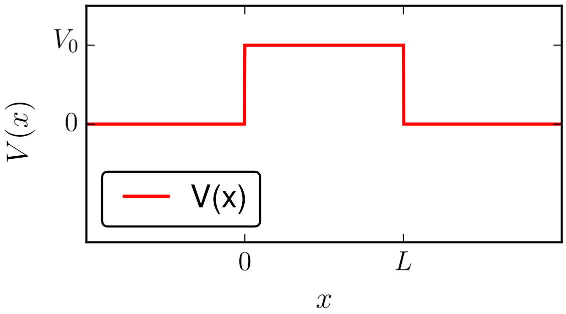
(1 Punkt)



b) Bestimmen Sie die Eigenenergien und Eigenzustände für

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \text{ und } x > L \\ V_0 & \text{für } 0 \leq x \leq L \end{cases} .$$

(1 Punkt)



Aufgabe 23 *Zwei-Niveau-System*

Betrachten Sie ein Zwei-Niveau-System, dessen Hamiltonoperator duch

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \frac{\hat{\sigma}_z}{2} + \hbar\Omega\hat{\sigma}_x.$$

gegeben ist, wobei ω_0 und Ω Frequenzen sind und ω_0 auch negativ sein kann.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\hat{H}$ und zeichnen Sie Eigenwerte als Funktion von ω_0. *(1 Punkt)*

b) Geben Sie die Zeitentwicklung des Anfangszustands $|\psi\rangle_0 = |\uparrow\rangle_y$ an. Dabei gilt $\hat{\sigma}_y|\uparrow\rangle_y = +|\uparrow\rangle_y$. *(1 Punkt)*