Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III

SoSe 2015 **Blatt 8** **23.06.2015**

Aufgabe 24 *Harmonischer Oszillator*

Zwei Teilchen der Masse m mit Positionen X_1 und X_2 und Impulsen P_1 und P_2 sind dem selben Potential

$$\hat{V}(\hat{X}) = \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{X}^2 \tag{1}$$

ausgesetzt. Die beiden Teilchen wechselwirken nicht untereinander.

a) Geben Sie den Hamiltonoperator $\hat{H}$ des Zwei-Teilchen-Systems an und zeigen Sie, dass er geschrieben werden kann als

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2. \tag{2}$$

Dabei wirkt $\hat{H}_1$ nur auf den Zustandsraum von Teilchen 1 und $\hat{H}_2$ entsprechend auf den Zustandsraum von Teilchen 2.
Berechnen Sie die Energien des Zwei-Teilchen-Systems, ihren Entartungsgrad und die entsprechenden Wellenfunktionen. *(1 Punkt)*

b) Bildet die Menge $\{\hat{H}\}$ einen vollständigen Satz kommutierender Observablen? Beantworten Sie die gleiche Frage für den Satz $\{\hat{H}_1, \hat{H}_2\}$.
Geben Sie die Orthonormierung sowie die Vollständigkeitsrelation für die Eigenvektoren an, die $\hat{H}_1$ und $\hat{H}_2$ gemeinsam haben. Wir bezeichnen Sie mit

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 |\phi_{n_1,n_2}\rangle &= \left(n_1 + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega |\phi_{n_1,n_2}\rangle, \\ \hat{H}_2 |\phi_{n_1,n_2}\rangle &= \left(n_2 + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega |\phi_{n_1,n_2}\rangle. \end{aligned} \tag{3}$$

(1 Punkt)

c) Betrachten Sie ein System, welches sich in folgendem Zustand befindet

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} \left(|\phi_{0,0}\rangle + |\phi_{1,0}\rangle + |\phi_{0,1}\rangle + |\phi_{1,1}\rangle\right). \tag{4}$$

Geben Sie die möglichen Ergebnisse und die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für folgende Messungen an

- die Gesamtenergie des Systems
- die Energie des ersten Teilchens
- die Position oder Geschwindigkeit dieses Teilchens

(1 Punkt)

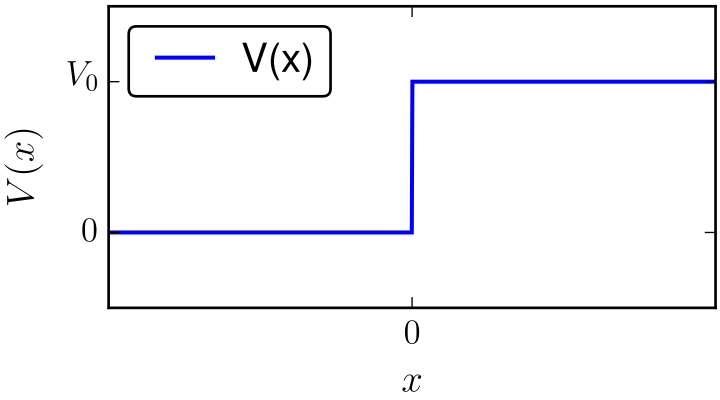

Figure 1: Potentialstufe

Aufgabe 25 *Potentialstufe*

Betrachten Sie ein Potential $V(x)$ aus Abbildung 1

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ V_0 & \text{for } x \geq 0 \end{cases} \tag{5}$$

a) Betrachten Sie ein Teilchen einfallend von $x = -\infty$ mit der Energie $E > V_0$. Geben Sie die Wellenfunktion für die Lösung der Schrödinger-Gleichung an. Bestimmen Sie den Reflexions- und Transmissionskoeffizienten. *(1 Punkt)*

b) Wiederholen Sie die Rechnungen aus Teilaufgabe a) für ein von $x = -\infty$ einfallendes Teilchen, jedoch mit einer Energie $0 < E < V_0$. *(1 Punkt)*

c) Definieren Sie

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} &= k \\ \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} &= K_0 \end{aligned} \tag{6}$$

und betrachten Sie den Fall $E < V_0$. Zeigen Sie, dass ein Wellenpaket zum Zeitpunkt $t = 0$, für negative x, geschrieben werden kann als

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{K_0} \mathrm{d}k g(k) \left[e^{\mathrm{i}kx} + e^{-2\mathrm{i}\Theta(k)} e^{-\mathrm{i}kx}\right]. \tag{7}$$

Dabei gilt $\tan\Theta(k) = \frac{\sqrt{K_0^2 - k^2}}{k}$ und $g(k)$ bezeichnet eine generelle Funktion, die das Wellenpaket beschreibt und für $k > K_0$ den Wert null annimmt. *(1 Punkt)*

d) Geben Sie die Funktion $\psi(x,t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t an. *(1 Punkt)*

e) Nehmen Sie an, die Funktion $g(k)$ sei reell und besitze ein ausgeprägtes Maximum der Breite Δk um $k = k_0 < K_0$. Bestimmen Sie die zeitabhängige Position des Schwerpunkts des einfallenden und des reflektierten Wellenpakets.
Hinweis: Bestimmen Sie die Ableitung des Exponenten an der Stelle $k = k_0$ und setzen Sie diese zu null (Methode der stationären Phase).

(1 Punkt)

Aufgabe 26 *Die Schwarzsche Ungleichung*

Sei $|\psi\rangle$ Element eines Zustandsraumes. Es gilt folgende Relation

$$\langle\psi|\psi\rangle \geq 0 \text{ und reell.} \tag{8}$$

Gleichheit gilt nur für den Fall, dass $|\psi\rangle$ den Nullvektor darstellt.
Betrachten Sie zwei beliebige Zustände $|\phi_1\rangle$ and $|\phi_2\rangle$.

a) Zeigen Sie, dass

$$|\langle\phi_1|\phi_2\rangle|^2 \leq \langle\phi_1|\phi_1\rangle\langle\phi_2|\phi_2\rangle\,. \tag{9}$$

(1 Punkt)

b) Wann gilt Gleichheit in Gleichung (9)? *(1 Punkt)*

Aufgabe 27 *Die Unschärferelation für $\hat{A}$ und $\hat{B}$*

Betrachten Sie drei Observablen $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ eines physikalischen Systems, für die gilt

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \mathrm{i}\hat{C}. \tag{10}$$

Im Folgenden bezeichnen wir mit $<\hat{O}>_{|\psi\rangle} = \langle\psi|\,\hat{O}\,|\psi\rangle$ den Mittelwert des Operators $\hat{O}$ bezüglich des Zustandes $|\psi\rangle$.

a) Zeigen Sie für einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle$ die folgende Beziehung

$$\langle\psi|\,\hat{A}^2\,|\psi\rangle\,\langle\psi|\,\hat{B}^2\,|\psi\rangle \geq \frac{\langle\psi|\,\hat{C}\,|\psi\rangle^2}{4}. \tag{11}$$

Hinweis: Betrachten Sie den Zustand $|\phi\rangle = (\hat{A} + \mathrm{i}\lambda\hat{B})|\psi\rangle$ für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ und berechnen Sie den Betrag. *(1 Punkt)*

b) Betrachten Sie

$$\begin{aligned} \Delta A &= \sqrt{\left\langle\left(\hat{A} - <\hat{A}>_{|\psi\rangle}\right)^2\right\rangle_{|\psi\rangle}} \\ \Delta B &= \sqrt{\left\langle\left(\hat{B} - <\hat{B}>_{|\psi\rangle}\right)^2\right\rangle_{|\psi\rangle}} \end{aligned} \tag{12}$$

und zeigen Sie, dass

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}|<[\hat{A}, \hat{B}]>_{|\psi\rangle}|. \tag{13}$$

(1 Punkt)