Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III

SoSe 2015 **Blatt 9** **02.07.2015**

Aufgabe 29 *Harmonischer Oszillator*

Im Folgenden wird der eindimensionale harmonische Oszillator untersucht, dessen Hamilton Operator wie folgt gegeben ist

$$\hat{H} := \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \tag{1}$$

mit der Masse m, der Oszillationsfrequenz ω, dem Ortsoperator $\hat{x}$ und dem Impulsoperator $\hat{p}$.

a) Berechnen Sie die Zeitentwicklung der Operatoren $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$, $\hat{x}$ und $\hat{p}$ im Heisenberg Bild.

(1 Punkt)

b) Betrachten Sie nun den kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$, der in der Basis der Fock Zustände $|n\rangle$ die folgende Darstellung besitzt

$$|\alpha\rangle := e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{2}$$

mit $\alpha \in \mathbb{C}$. Leiten Sie nun die Zerlegung des Einheitsoperators in der Basis der kohärenten Zustände her

$$\frac{1}{\pi}\int |\alpha\rangle\langle\alpha|\,\mathrm{d}^2\alpha = \hat{\mathbb{1}}. \tag{3}$$

(1 Punkt)

Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung des kohärenten Zustands in der Fock Basis in Gl. (2) und führen Sie die folgenden Rechnungen in Polarkoordinaten $\alpha = re^{\mathrm{i}\phi}$ mit $r > 0$ und $\phi \in [0, 2\pi]$ durch. Nutzen Sie hierbei die folgenden Relationen:

$$\text{(i)}\quad \mathrm{d}^2\alpha = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi, \qquad \text{(ii)}\quad \int_0^\infty \epsilon^n \mathrm{e}^{-\epsilon}\mathrm{d}\epsilon = n!.$$

.

Aufgabe 30 *Gequetschter Zustand*

Ein *gequetschter Zustand* $|\xi\rangle$ (engl. "squeezed state") einer einzelnen Mode wird erzeugt durch

$$|\xi\rangle := \hat{S}(\xi)|0\rangle, \tag{4}$$

$$\hat{S}(\xi) := \exp\left(\frac{\xi^*\hat{a}^2 - \xi\hat{a}^{\dagger 2}}{2}\right) \tag{5}$$

mit dem Quetschoperator $S(\xi)$ (engl. "squeezing operator"). Hierbei ist $\xi = r\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C}$ eine beliebige komplexe Zahl mit $r > 0$ und $\theta \in [0, \pi]$. Betrachten Sie nun den dimensionslosen Ortsoperator $\hat{X}$ und den dimensionslosen Impulsoperator $\hat{P}$ die wie folgt definiert sind

$$\hat{X} := \hat{a} + \hat{a}^\dagger, \qquad \hat{P} = -\mathrm{i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \tag{6}$$

Ihr Kommutator ist gegeben durch $[\hat{X}, \hat{P}] = 2\mathrm{i}$, woraus die Orts-Impulsunschärferelation $\Delta X \Delta P \geq 1$ folgt.

a) Zeigen Sie, dass $\hat{S}(\xi)$ ein unitärer Operator ist. *(1 Punkt)*

b) Leiten Sie zunächst die transformierten Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren her

$$\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}\hat{S}(\xi) = \hat{a}\cosh(r) - \hat{a}^\dagger\sinh(r)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}, \tag{7a}$$

$$\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}^\dagger\hat{S}(\xi) = \hat{a}^\dagger\cosh(r) - \hat{a}\sinh(r)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}. \tag{7b}$$

Verallgemeinern Sie dann diese Relationen, indem Sie die Transformation $\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)\hat{S}(\xi)$ eines allgemeines Polynoms $\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ in den Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ bestimmen. Jeder Summand des Polynoms ist hierbei von der Form $\alpha\hat{X}_1 \ldots \hat{X}_n$ mit $\hat{X}_i \in \{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. *(1 Punkt)*

c) Berechnen Sie den Erwartungswerte $\langle\hat{n}\rangle$ und die Standardabweichung Δn für einen gequetschten Zustand $|\xi\rangle$. *(1 Punkt)*

d) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\hat{X} + \mathrm{i}\hat{P}\rangle$ und die Standardabweichungen ΔX und ΔP. Bestimmen Sie hieraus die Orts-Impulsunschärfe $\Delta X \Delta P$ eines gequetschten Zustands. *(2 Punkte)*