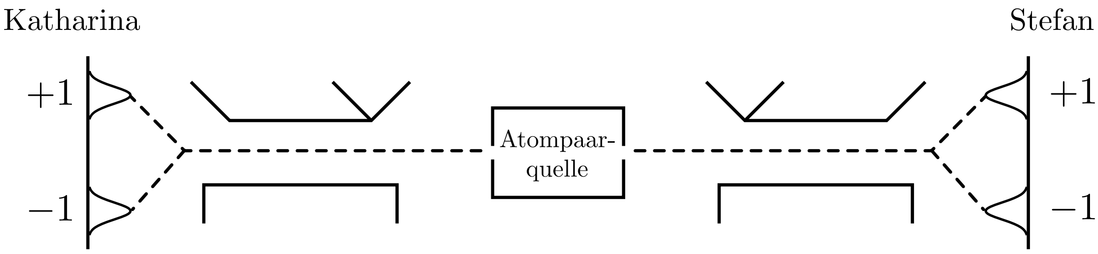
Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III

SoSe 2015 **Blatt 3** **21.05.2015**

Aufgabe 11 *Bellsche Ungleichung*

Wir betrachten eine Quelle, die Paare von Silberatomen emittiert, von denen ein Atom nach



links fliegt und ein Atom nach rechts. Auf der linken Seite führt Katharina mit einem Stern-Gerlach Apparat Messungen in der $\boldsymbol{a}$-Richtung durch, während auf der rechten Seite Stefan in die $\boldsymbol{b}$-Richtung misst. Beide finden jeweils nur die Messergebnisse $+1$ und -1. Nehmen wir an dass N Atompaare emittiert werden und schreiben wir dir Messergebnisse von Katharina in den Vektor $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ und die von Stefan in den Vektor $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Die Bellsche Korrelation $C(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ist als

$$C(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{\sum_i a_i b_i}{N} \tag{1}$$

definiert.

a) Die Bellsche Korrelation $C(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ist beschränkt, d.h. es existieren Zahlen k_1 und k_2 sodass $k_1 \leq C(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \leq k_2$ gilt. Bestimmen Sie k_1 und k_2. *(1 Punkt)*

b) Nehmen wir nun an, dass die probabilistische Natur der Quantenmechnik von versteckten Variablen des Systems herrührt, die wir nicht kennen. D.h. jedes Atompaar ist durch einen Satz von Parametern charakterisiert, den wir mit x bezeichnen. Diese Parameter seien gemäß der Verteilung $p(x)$ verteilt. Die Wahrscheinlichkeit einen Wert zwischen x und $x + \mathrm{d}x$ zu finden ist also durch $p(x)\mathrm{d}x$ gegeben. Die Verteilung erfüllt

$$p(x) \geq 0, \qquad \int p(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Wir bezeichnen nun mit $A_x(\boldsymbol{a})$ die Messergebnisse, die Katharina mit ihrem SG Apparat in der $\boldsymbol{a}$-Richtung misst und mit $B_x(\boldsymbol{b})$ die entsprechenden Messergbnisse, die Stefan misst. Argumentieren Sie, dass die Bellsche Korrelation durch

$$C(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \int p(x) A_x(\boldsymbol{a}) B_x(\boldsymbol{b}) \mathrm{d}x. \tag{2}$$

gegeben ist. *(1 Punkt)*

c) Betrachten Sie jetzt zwei Richtungen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{a}'$ auf der linken Seite und zwei Richtungen $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{b}'$ auf der rechten Seite. Zeigen Sie mit Hilfe von Gl. (2), dass die Bellsche Ungleichung

$$|C(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - C(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}')| + |C(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}) + C(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}')| \leq 2 \tag{3}$$

erfüllt ist.
Hinweis: Benutzen Sie die Dreiecksungleichung. *(2 Punkte)*

d) Verwerfen Sie nun das Konzept der versteckten Variablen und gehen Sie davon aus, dass der Zustand des Atompaares durch

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow_z\downarrow_z\rangle - |\downarrow_z\uparrow_z\rangle\right). \tag{4}$$

gegeben ist. Drücken Sie den Zustand $|\psi\rangle$ in der Basis der Zustände Spin auf/ab in y-Richtung aus. *(1 Punkt)*

e) Schreiben Sie den Dichteoperator $\hat{\rho}_{|\psi\rangle}$ des Zustands $|\psi\rangle$ auf und bringen Sie ihn in die Form

$$\hat{\rho}_{|\psi\rangle} = \frac{1}{4}\left(\hat{\mathbb{1}}_4 - \hat{\boldsymbol{\sigma}}^A \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}^B\right) = \frac{1}{4}\left(\hat{\mathbb{1}}_4 - \sum_{i=x,y,z} \hat{\sigma}_i^A \otimes \hat{\sigma}_i^B\right). \tag{5}$$

(2 Punkte)

f) Was für einen Wert hat $C(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \mathrm{Tr}\left(\hat{A}(\boldsymbol{a})\hat{B}(\boldsymbol{b})\hat{\rho}\right)$, mit $\hat{A}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}^A$ und $\hat{B}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}^B$, wenn $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ gilt? Hierbei bezeichnen $\hat{\sigma}_i^A$ und $\hat{\sigma}_i^B$ die Paulioperatoren der beiden Atome des Atompaares. Erklären Sie den Zusammenhang zwischen C, wie es hier definiert ist, und C aus Gl. (2). *(1 Punkt)*

g) Zeigen Sie für zwei beliebige Richtungen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$, dass

$$C(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}. \tag{6}$$

gilt. *(1 Punkt)*

h) Für welche Richtungen $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{b}'$ hat die Funktion

$$L = |C(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - C(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}')| + |C(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}) + C(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}')| \tag{7}$$

ein Maximum und wie lautet dieses? Diskutieren Sie dieses Ergebnis im Bezug zur Bellschen Ungleichung. *(3 Punkte)*

Aufgabe 12 *Peres Kriterium*

Ein System bestehe aus zwei Spins, die mit A und B gekennzeichnet sind. Der Dichteoperator $\hat{\rho}$ des Gesamtsystems ist *separabel*, falls

$$\hat{\rho} = \sum_i w_i \hat{\rho}_i^A \otimes \hat{\rho}_i^B \tag{8}$$

gilt, wobei $\hat{\rho}_i^A$ und $\hat{\rho}_i^B$ Dichteoperatoren der Subsysteme A und B sind, $w_i \geq 0$ gilt und $\sum_i w_i = 1$ erfüllt ist.

a) Zeigen Sie dass der Operator $\hat{\rho}$, gegeben durch Gl. (8), alle Eigenschaften eines Dichteoperators besitzt. *(1 Punkt)*

b) Wir beschreiben den Dichteoperator $\hat{\rho}$ nun explizit durch seine Matrixelemente

$$\rho_{m\mu,n\nu} = \sum_i w_i (\rho_i^A)_{mn} \otimes (\rho_i^B)_{\mu\nu}. \tag{9}$$

Der *partiell transponierte* Operator $\hat{\tilde{\rho}}$ von $\hat{\rho}$ ist durch seine Matrixelemente als

$$\tilde{\rho}_{m\mu,n\nu} = \rho_{n\mu,m\nu}. \tag{10}$$

definiert. Zeigen Sie dass $\hat{\tilde{\rho}}$ hermitesch ist und dass seine Spur gleich eins ist, auch wenn $\hat{\rho}$ Gl. (8) nicht erfüllt. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie weiterhin dass wenn $\hat{\rho}$ Gl. (8) erfüllt auch $\hat{\tilde{\rho}}$ ein Dichteperator ist. *(1 Punkt)*

d) Sei $\hat{\rho}_{|\psi\rangle}$ nun wieder der Dichteoperator des Zustandes

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow_z \downarrow_z\rangle - |\downarrow_z \uparrow_z\rangle \right). \tag{11}$$

Zeigen Sie, dass die partiell transponierte Dichtematrix von $\hat{\rho}_{|\psi\rangle}$ keinen Dichteoperator darstellt. *(1 Punkt)*

e) Betrachten Sie zuletzt den Dichteoperator

$$\hat{\varrho} = x\hat{\rho}_{|\psi\rangle} + \frac{1-x}{2} \left(|\uparrow_z\uparrow_z\rangle\langle\uparrow_z\uparrow_z| + |\downarrow_z\downarrow_z\rangle\langle\downarrow_z\downarrow_z| \right). \tag{12}$$

für $(0 \leq x \leq 1)$. Bestimmen Sie die Werte von x für die $\hat{\varrho}$ nicht separabel ist. *(1 Punkt)*

f) Bestimemn Sie das Maximum (bezüglich der Richtungen $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}'$) der Funktion

$$L = |C(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - C(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}')| + |C(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}) + C(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}')| \tag{13}$$

für den Dichteoperator aus Gl. (12) und geben Sie an für welche Werte von x die Bellsche Ungleichung verletzt wird.
Heinweis: Das Maximum ist eine Funktion von x. *(2 Punkte)*

g) Vergleichen Sie die Werte von x für die $\hat{\varrho}$ nicht separabel ist mit den Werten von x für die die Bellsche Ungleichung verletzt wird. Diskutieren Sie dieses Ergebnis. *(1 Punkt)*