Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik I

SoSe 2016 **Blatt 10** **30.06.2016**

Aufgabe 31 *Hamilton-Funktion von zwei wechselwirkenden Teilchen*

Betrachten Sie zwei Teilchen mit den Massen m_1 und m_2, Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$ und Geschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{r}}_1$ und $\dot{\boldsymbol{r}}_2$. Die Teilchen wechselwirken über eine konservative Kraft, die aus dem Potential

$$V = V(|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|) \tag{1}$$

hergleitet werden kann, das nur vom Abstand der beiden Teilchen abhängt.

a) Geben Sie die Lagrange-Funktion des Systems in Abhängigkeit der Schwerpunkts- und Relativkoordinaten $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ an. Beschreiben Sie die Bewegung des Schwerpunkts. *(1 Punkt)*

b) Geben Sie die Lagrange-Funktion der Relativbewegung in Polarkoordinaten (r, θ) an. Leiten Sie daraus die Euler-Lagrange-Gleichungen ab. *(1 Punkt)*

c) Geben Sie die Hamiltonian-Funktion $H(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p_R}, \boldsymbol{p_r})$ des Systems an, wobei $\boldsymbol{p_R}$ und $\boldsymbol{p_r}$ die zu $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{r}$ konjugierten Impulse darstellen. *(1 Punkt)*

d) Geben Sie die Hamilton-Funktion $H(r, \theta, p_r, p_\theta)$ der Relativbewegung in Polarkoordinaten (r, θ) an. Leiten Sie daraus die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen ab. Wie lauten die Konstanten der Bewegung? *(1 Punkt)*

Aufgabe 32 *Schwerer symmetrischer Kreisel mit festgehaltenem Punkt*

Betrachten Sie einen symmetrischen Kreisel der Masse M im Gravitationspotential. Ein Punkt des Kreisels sei dabei fest im Raum. Der Abstand zwischen dem festen Punkt und dem Massenschwerpunkt sei l. Die Symmetrieachse ist eine Hauptachse und zeigt entlang der z-Achse des körperfesten Bezugssystems. Die Hauptträgheitsmomente sind $I_1 = I_2$ und I_3 und die Eulerwinkel (θ, ϕ, ψ) sind die Winkel zwischen dem körperfesten Koordinatensystem und dem Koordinatensystem des Raumes.

a) Schreiben Sie die Lagrange-Funktion als Funktion der Eulerwinkel und deren Zeitableitungen. Geben Sie die zu den Eulerwinkeln konjugierten Impulse $(p_\theta, p_\phi, p_\psi)$ an. *(2 Punkte)*

b) Geben Sie die Hamilton-Funktion $H(\theta, \phi, \psi, p_\theta, p_\phi, p_\psi)$ des Systems an. Welche Größen sind erhalten? *(2 Punkte)*

c) Leiten Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen her. *(2 Punkte)*

d) Zeigen Sie, dass die Lösung der Hamiltonschen Bewegungsgleichung für $\theta(t)$ in Form des elliptischen Integrals

$$t = \int_{u(0)}^{u(t)} \mathrm{d}u \, \frac{1}{\sqrt{(1-u)^2 \left(\frac{2E'}{I_1} - \frac{2Mgl}{I_1} u\right) - \left(\frac{p_\phi}{I_1} - \frac{p_\psi}{I_1} u\right)^2}}$$

gegeben ist, mit $u = \cos\theta$ und der Konstanten $E' = E - \frac{p_\psi^2}{2I_3}$ wobei E die Gesamtenergie darstellt. Diskutieren Sie die Lösung des gesamten Systems. *(2 Punkte)*