Übung zur Vorlesung Theoretische Physik I

SoSe 2016 **Blatt 11** **07.07.2016**

Aufgabe 33 *Kanonische Transformationen*

a) Eine Tranformation zwischen den Korrdinaten (q, p) und (Q, P) sei durch

$$\begin{aligned} Q &= \log(1 + q^{\frac{1}{2}} \cos p)\,, \\ P &= 2(1 + q^{\frac{1}{2}} \cos p) q^{\frac{1}{2}} \sin p \end{aligned} \tag{1}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass für den Fall von kanonische Variablen (q, p) auch (Q, P) kanonisch sind. *(2 Punkte)*

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F_3 = -(e^Q - 1)^2 \tan p \tag{2}$$

eine Erzeugendefunktion (dritter Art) für die kanonische Transformation definiert in Gleichung (1) ist. *(2 Punkte)*

c) Betrachten Sie die Transformation zwischen den Koordinaten (q, p) und (Q, P), die durch

$$\begin{aligned} Q &= q^\alpha \cos \beta p\,, \\ P &= q^\alpha \sin \beta p \end{aligned} \tag{3}$$

gegeben ist. Für welche Werte von α und β ist diese Transformation kanonisch? *(2 Punkte)*

d) Finden Sie die Erzeugendefunktion dritter Art, $F_3(p, Q)$, die die Transformation (3) erzeugt, für die Werte von α und β für die diese kanonisch ist. *(2 Punkte)*

Aufgabe 34 *Rotierendes Bezugssystem*

Ein Teilchen der Masse m befindet sich im Potential $V(x^2 + y^2)$, das symmetrisch um die z-Achse ist. (x, y, z) bezeichnen die Koordinaten des Inertialsystems.

a) Schreiben Sie die Lagrangefunktion in Abhängigkeit der kartesischen Koordinaten (x', y', z') des Bezugssystems, das entgegen dem Uhrzeigersinn mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotiert. Wie lauten die zyklischen Koordinaten? *(2 Punkte)*

b) Zeigen Sie, dass die Hamiltonfunktion des Teilchens in Abhängigkeit der oben definierten kartesischen Koordinaten (x', y', z') als

$$H = \frac{p_{x'}^2}{2m} + \frac{p_{y'}^2}{2m} + \frac{p_{z'}^2}{2m} - \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{L'} + V(x'^2 + y'^2) \tag{4}$$

geschrieben werden kann. Hierbei sind $p_{x'}$, $p_{y'}$ und $p_{z'}$ die zu (x', y', z') konjugierten Impulse, $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)^T$ und $\boldsymbol{L'}$ der Drehimpuls des Teilchens im rotierenden Bezugssystem. Was ist in diesem Fall die physikalische Bedeutung der Hamiltonfunktion? *(3 Punkte)*

c) Betrachten Sie nun nur die Bewegung in der x-y Ebene mit $z = 0$. Geben Sie die Funktion $F_2(x, y, p_{x'}, p_{y'})$, die die kanonische Transformation zwischen (x, y) und (x', y') generiert, an. *(3 Punkte)*

d) Schreiben Sie die kanonischen Bewegungsgleichungen im rotierenden Bezugsssystem auf und geben Sie eine physikalische Bedeutung aller Terme der Gleichungen an. *(2 Punkte)*