Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik I
Nachklausur MMP, mit Genehmigung von Prof. Santen

SoSe 2016 **Blatt 1** **18.04.2016**

Aufgabe 1 *Rechnen mit Summen und komplexen Zahlen*

a) Berechnen Sie folgenden Reihen

1. $\sum_{n=1}^{8} 3^{n-1}$ *(1 Punkt)*
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$ *(1 Punkt)*
3. $\sum_{n=0}^{100} (3n^2-n+1)$ *(1 Punkt)*

b) Sei $z = \exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{6}\right)$. Geben Sie die folgenden Ausdrücke in der Form $x + \mathrm{i}y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ an. Im Besonderen gelte in 2. $-\pi < y \leq \pi$

1. z^8 *(1 Punkt)*
2. $\ln(z - z^2)$ *(1 Punkt)*

Aufgabe 2 *Differentialrechnung: Partielle und totale Ableitung von skalaren Funktionen und Extremwerte*

a) Gegeben sei die skalare Funktion

$$f(x, y, z) = x^z \sin y.$$

1. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$. *(1 Punkt)*
2. Berechnen Sie die totale Ableitung $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ entlang der Kurve $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$. *(1 Punkt)*

b) Gegeben sei die skalare Funktion

$$\begin{aligned} &g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ &(x, y) \mapsto x^3 + 3xy - 3x^2y - 3y^2 + 3xy^2. \end{aligned}$$

1. Finden Sie die Extremwerte der Funktion $g(x, y)$ und geben Sie an, ob es sich um Minimum, Maximum oder Sattelpunkt handelt. *(2 Punkte)*

Aufgabe 3 *Integralrechnung*

a) Berechnen Sie folgende eindimensionale Integrale

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$ *(1 Punkt)*
2. $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} x(\ln x)^2 \mathrm{d}x.$ *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

1. $\displaystyle\int_C f\mathrm{d}s,\ f = 4(x^2 - y^{-2}),\ C : x = \frac{1}{2}t^2,\ y = \sqrt{2}t,\ z = \ln t\ (1 \leq t \leq 2).$ *(1 Punkt)*
2. $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s},\ \mathbf{F} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ xy \end{pmatrix}$ entlang der Kurve $C : x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t^2\ (0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}).$ *(1 Punkt)*

c) Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\displaystyle\iint_S (x^4 + x^2y^2 + y^4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ auf der Oberfläche S : $x^2 + y^2 \leq 1.$ *(1 Punkt)*

d) Gegeben sei die vektorielle Funktion

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 \end{pmatrix}$$

und das kegelförmige Volumen $V : x^2 + y^2 \leq (1 - z)^2\ (0 \leq z \leq 1).$

1. Berechnen Sie $\displaystyle\iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$, wobei ∂V den Rand von V beschreibt.
   Hinweis: Beachten Sie, dass der Kegel geschlossen ist und somit die Bodenfläche auch zum Rand des Volumens ∂V dazugehört. *(1 Punkt)*
2. Berechnen Sie dieses Integral nun mithilfe des Gaußschen Integralsatzes. *(1 Punkt)*

Aufgabe 4 *Differentialgleichungen*

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme

a) $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x - 8\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x + 41x = 0$ mit $x(0) = 3,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(0) = 2.$

Geben Sie hierbei die Lösung in Form einer Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an. *(1 Punkt)*

b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y - 4y = 4xe^{2x}$ mit $y(0) = 0.$ *(1 Punkt)*

Aufgabe 5 *Ebenenschnitt*

Gegeben seien drei Ebenen

$$
\begin{aligned}
E_1 &: 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\
E_2 &: 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \\
E_3 &: 5x_1 + x_2 + x_3 = 2.
\end{aligned}
$$

Stellen Sie ein Gleichungssystems der Form $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ auf.

a) Zeigen Sie zuerst explizit, dass die inverse Abbildung $\boldsymbol{A}^{-1}$ existiert. *(1 Punkt)*

b) Lösen Sie dann mithilfe dieser inversen Abbildung das Gleichungssystem. *(1 Punkt)*

Aufgabe 6 *Eigenwertproblem und gekoppelte Differenzengleichung*

Gegeben sei die Matrix

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}
$$

.

a) Berechnen Sie $(\mathbf{1} - \boldsymbol{A})^{-1}$. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$. *(1 Punkt)*

c) Berechnen Sie $\boldsymbol{A}^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$. *(1 Punkt)*

d) Berechnen Sie mit Ihrem Ergebnis aus c) die folgende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^n$. *(1 Punkt)*

Hinweis: Beachten Sie, dass Matrizen komponentenweise addiert werden und dass $\boldsymbol{A}^0 = \mathbf{1}$.

e) Lösen Sie schließlich das folgende Gleichungssystem

$$
\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{2} y_n \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{4} x_n - \dfrac{1}{4} y_n \end{cases}
$$

mit den Startwerten

$$
\begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 3 \end{cases}
$$

(1 Punkt)