Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik I

SoSe 2016 **Blatt 2** **25.04.2016**

Aufgabe 7 *Satz von Stokes*

Zeigen Sie explizit, dass die Integralidentität

$$\oint_\gamma \mathrm{d}\mathbf{s} \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \int_A \mathrm{d}\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z))$$

für das Vektorfeld

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2xy + x \\ z \end{pmatrix}$$

und den geschlossenen Weg γ, der dem Einheitskreis in der x-y-Ebene entgegen dem Uhrzeigersinn folgt, erfüllt ist. Hierbei bezeichnet $\mathrm{d}\mathbf{s}$ das Wegelement, A *eine* vom Weg γ umrandete Fläche und $\mathrm{d}\mathbf{A}$ das Oberfächenelement. Hängt der Wert des Flächenintegrals bei einem festen Weg γ von der genauen Form der Fläche ab? Geben Sie ein Beispiel für Ihre Antwort. Hängt der Wert des Wegintegrals von der Form des Weges ab? *(1 Punkt)*

Aufgabe 8 *Kraftfelder und Arbeit*

Betrachten Sie das Kraftfeld

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} k_1 y \\ k_1 x \\ 2k_2 z \end{pmatrix} \tag{1}$$

wobei k_1 und k_2 die Einheit $\mathrm{kg/s^2}$ haben und x, y, z die kartesischen Koordinaten in der Einheit m sind.

a) Zeigen Sie, dass es sich um eine konservative Kraft handelt und bestimmen Sie das Potential V. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie die Arbeit, die bei einer Bewegung von $(0, 0, 0)^T$ nach $(r, r, r)^T$ verrichtet wird. Hierbei hat auch r die Einheit m. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie, dass alle Kraftfelder der Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(|\mathbf{r}|)\mathbf{e}_r$$

mit einer skalaren Funktion f und dem Einheitsvektor $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ von einem Potential V abgeleitet werden können. *(1 Punkt)*

Aufgabe 9 *Kinetische Energie und Arbeit*

Betrachten Sie N Teilchen mit den Koordinaten $\mathbf{r}_\alpha$ und Massen m_α, die den Kräften $\mathbf{F}_\alpha$ unterliegen ($\alpha = 1, ..., N$). Die kinetische Energie ist durch

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha^2$$

gegeben. Nehmen Sie an, dass sich die Teilchen zum Anfangszeitpunkt t_i an den Orten $\mathbf{r}_\alpha(t_i)$ und zum Endzeitpunkt t_f an den Orten $\mathbf{r}_\alpha(t_f)$ befinden. Zeigen Sie, dass die Arbeit

$$W = \sum_{\alpha=1}^{N} \int_{\mathbf{r}_\alpha(t_i)}^{\mathbf{r}_\alpha(t_f)} \mathrm{d}\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{F}_\alpha \,,$$

die durch die Kräfte verrichtet wird, durch die Differenz der kinetischen Energie vom Anfangs- und Endzeitpunkt gegeben ist. *(1 Punkt)*

Aufgabe 10 *Punktmasse im Zentralpotential*

Betrachten Sie eine Punktmasse m, die sich in einem Kraftfeld bewegt, das von einem Potential $V(r)$ abgeleitet wird, das nur vom Abstand $r = |\boldsymbol{r}|$ des Teilchens vom Ursprung abhängt.

a) Geben Sie die Lagrangefunktion in kartesischen Koordinaten (x, y, z) an. *(1 Punkt)*

b) Geben Sie die Lagrangefunktion in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) an. *(1 Punkt)*

c) Geben Sie die Lagrangefunktion in Kugelkoordinaten $(\rho, \vartheta, \varphi)$ an. *(1 Punkt)*

d) Leiten Sie ausgehend von der Lagrangefunktion in Kugelkoordinaten die Euler-Lagrange-Gleichung für die Koordinaten ϑ und φ ab. *(1 Punkt)*

e) Zeigen Sie, dass die Größe $m^2 r^4 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\ \dot{\varphi}^2)$ erhalten ist. *(2 Punkte)*

Aufgabe 11 *Zwangsbedingung I - Sphärisches Pendel*

Ein sphärisches Pendel ist eine Punktmasse m, die an einem starren, masselosen Stabes der Länge l hängt und der Erdbeschleunigung $-g\mathbf{e}_z$ ausgesetzt ist. Hierbei ist g eine Konstante und $\mathbf{e}_z$ der Einheitsvektor in z-Richtung.

a) Geben Sie die Lagrangefunktion des Systems in Kugelkoordinaten an und identifizieren Sie eine zyklische Koordinate und deren konjugieten Impuls. Was können Sie über diesen konjugierten Impuls sagen? *(1 Punkt)*

b) Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung ab. *(1 Punkt)*

Aufgabe 12 *Zwangsbedingung II*

Zwei identische Punktmassen m sind in ihrer Bewegung auf die x-y-Ebene eingeschränkt. Die beiden Massen sind durch einen starren, masselosen Stab der Länge l verbunden. Der Mittelpunkt des Stabes kann sich nur in der x-y-Ebene auf einem Kreis mit Radius a bewegen. Es wirke keine Gravitationskraft.

a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System? Geben Sie die verallgemeinerten Koordinaten an. *(1 Punkt)*

b) Geben Sie die Orte der beiden Massen als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten an. *(1 Punkt)*

c) Schreiben Sie die kinetische Energie T in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten. *(1 Punkt)*

d) Lösen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen des Systems. *(1 Punkt)*