Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik I

SoSe 2016 **Blatt 3** **11.05.2016**

Aufgabe 13 *Variationsrechnung - Minimale Rotationsfläche*

Betrachten Sie die Rotationsfläche, die entsteht wenn man eine Kurve, die durch zwei feste Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) verläuft, um die y-Achse rotiert (vgl Abbildung 1).

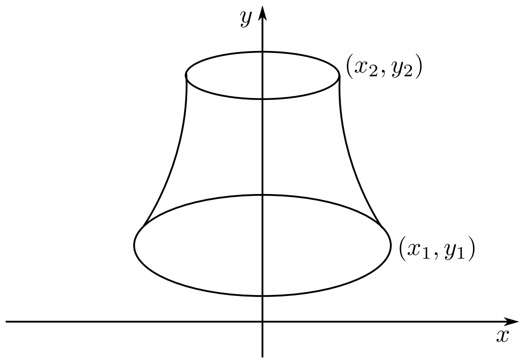

Abbildung 1: Rotationsfläche

a) Schreiben Sie die Fäche, die durch eine allgemeine Funktion, die beide Punkte verbindet $(y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2)$, gegeben ist, als Funktion von x und $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. *(1 Punkt)*

b) Geben Sie die Euler-Lagrange Gleichung für das Funktional aus a) an. *(1 Punkt)*

c) Lösen Sie die Euler-Lagrange Gleichung aus b). *(1 Punkt)*

Aufgabe 14 *Variationsrechnung - Brachistochrone*

Betrachten Sie eine Teilchen der Masse m, das sich anfangs in Ruhe am Punkt $(x_1, y_1 = 0)$ befindet und der Schwerkraft entlang der positiven y-Richtung ausgesetzt ist (vgl. Abbildung 2). Die Brachistochrone ist die Kurve, die die Zeit minimiert, die das Teilchen benötigt um den Punkt (x_2, y_2) mit $y_2 > y_1$ zu erreichen.

a) Benutzen Sie eine Variationsrechnung um das Funktional aufzustellen, das minimiert werden muss um die Brachistochrone zu bestimmen, und geben Sie die zugehörige Euler-Lagrange Gleichung an. (**Hinweis:** Nutzen Sie die Energieerhaltung.) *(2 Punkte)*

b) Lösen Sie die Euler-Lagrange Gleichung und bestimmen Sie damit die Brachistochrone. (**Hinweis:** Nutzen Sie die Parametrisierung $y(s) \propto \sin^2(\frac{s}{2})$) *(3 Punkte)*

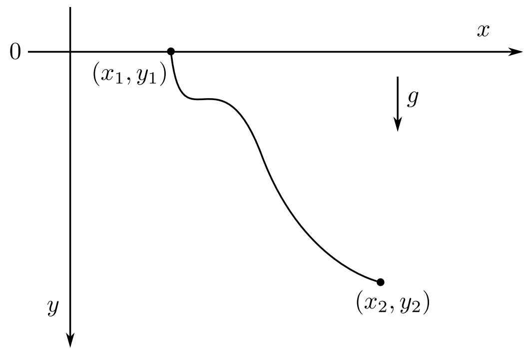

Abbildung 2: Das Brachistochronenproblem

Aufgabe 15 *Kraftfeld*

Betrachten Sie die konservative Kraft $\boldsymbol{F}$ auf eine Punktmasse m mit Koordinaten $\boldsymbol{r}$. Es gelte

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} F_x(x,y) \\ F_y(x,y) \\ F_z \end{pmatrix}, \quad F_z = 0; \qquad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad z = \dot{z} = 0. \tag{1}$$

a) Wieviele verallgemeinerte Koordinaten gibt es? Geben Sie die verallgemeinerten Kräfte (Q_r, Q_θ) in Abhängigkeit der Polarkoordinaten (r, θ) an. *(1 Punkt)*

b) Betrachten Sie den Fall $Q_r = f_0(r)$ und $Q_\theta = 0$. Geben Sie die Lagrangefunktion an. Existieren zyklischeI Variablen? Geben Sie die konjugierten Impuls zu den verallgemeinerten Koordinaten an. Welche physikalische Bedeutung haben diese Impulse? Gibt es Impulse, die erhalten sind? *(1 Punkt)*

c) Geben Sie die Euler-Lagrange Gleichungen in Abhängigkeit von (r, θ) an. *(1 Punkt)*

d) Beschreiben Sie qualitativ das Verhalten der Lösungen für den Fall

$$f_0(r) = \frac{A}{r^3} \tag{2}$$

in Abhängigkeit von A und der Gesamtenergie E. Fertigen Sie eine Skizze der Bahnkurven an. *(1 Punkt)*

Aufgabe 16 *Schwerpunkt*

Betrachten Sie zwei Teilchen der Massen m_1 und m_2, die miteinander über eine Kraft wechselwirken, die durch das Potential

$$W = W(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|) \tag{3}$$

gegeben ist, das nur vom Abstand der beiden Teilchen abhängt.

a) Geben Sie die Lagrangfunktion des Systems an. *(1 Punkt)*

b) Finden Sie die zyklische Koordinate und deren konjugierten Impuls. Geben Sie die Euler-Lagrange Gleichungen an. Welche physikalischen Größen sind erhalten? *(2 Punkte)*

Aufgabe 17 *Lagrange- und Hamiltonfunktion*

Betrachten Sie die Lagrangefunktion

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 - \sum_i V(x_i) + \sum_i \boldsymbol{A}(x_i) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i, \tag{4}$$

wobei das Potential V nur von den Koordinaten x_i abhängt. Die Vektoren $\boldsymbol{r}_i$ und $\boldsymbol{A}$ sind durch $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ und (A_x, A_y, A_z) gegeben.

a) Bestimmen Sie die zu x_i, y_i und z_i konjugierten Impulse. *(1 Punkt)*

b) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion des Systems. *(1 Punkt)*

c) Ist das System konservativ? *(1 Punkt)*