Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik I

SoSe 2016 **Blatt 4** **18.05.2016**

Aufgabe 18 *Yukawa potential*

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m in einem Zentralpotential der Form

$$V(r) = -k\frac{e^{-ar}}{r}, \tag{1}$$

wobei k und a positive Konstanten sind.

a) Geben Sie die Lagrangefunktion an. Geben Sie die zyklischen Koordinaten und die Konstanten der Bewegungn an. *(1 Punkt)*

b) Schreiben Sie die Euler-Lagrange Gleichung auf und finden Sie die Bedingung unter der kreisförmige Bahnen existieren. *(1 Punkt)*

c) Geben Sie das effektive Potential $V_{\text{eff}}(r)$ an und diskutieren Sie die Bahnkurven in Abhängigkeit der Anfangsenergie des Teilchens. Geben Sie explizit die Bedingung für die Beschränktheit der Bewegung an. *(2 Punkte)*

Aufgabe 19 *Aufeinanderstürzende Planeten*

Betrachten Sie zwei Planeten der Massen M_1 and M_2, die im Einfluss ihrer Schwerkraft umeinander kreisen. Die Periode ihrer Kreisbahn sei durch τ gegeben.

a) Geben Sie die Euler-Lagrange-Gleichung der Relativkoordinate r an und drücken Sie den Abstand der beiden Planeten durch τ aus. *(1 Punkt)*

b) Nehmen Sie nun an dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Planetenbewegung plötzlich angehalten wird. Geben Sie die neue Bewegungsgleichung für die Relativkoordinate an und spezifizieren Sie die neuen Anfangsbedingungen. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie, dass die zwei Planeten mit den Anfangsbedingungen aus b) nach der Zeit $t = \tau/(4\sqrt{2})$ kollidieren. *(2 Punkte)*

Aufgabe 20 *Von der Bahnkurve zum Potential*

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, das sich in einem attraktiven Zentralpotential $V(r)$ befindet. Das Teilchen bewegt sich auf einem Kreis in der xy-Ebene mit Mittelpunkt $(R, 0, 0)^T$ und Radius R. Beachten Sie dass der Ursprung des Potentials *nicht* mit dem Mittelpunkt des Kreises übereinstimmt.

a) Geben Sie die Bahn $r(\phi)$ an, die die Bewegung des Teilchens in Polarkoordinaten (r, ϕ) beschreibt. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie dass die Kraft $\mathbf{F}(r) = f(r)\mathbf{r}/r$ auf das Teilchen, die vom Potential $V(r)$ abgeleitet wird und zu einer derartigen Kurve führt, umgekehrt proportional zur fünften Potenz des Abstands r ist. *(2 Punkte)*

c) Zeigen Sie dass die Gesamtenergie des Teilchens gleich Null ist. *(1 Punkt)*

d) Finden Sie die Periode τ der Bewegung. *(2 Punkte)*

Aufgabe 21 *Periheldrehung*

Ein Körper der Masse m bewegt sich im Zentralpotential $V(r) = -\alpha/r$, mit $\alpha > 0$. Das *Perihel* bezeichnet den Punkt einer Bahnkurve, der dem Ursprung am nächsten liegt. Betrachten Sie im Folgenden nur gebundene Bahnen, die in diesem Potential bekanntermaßen geschlossen sind. Betrachten Sie nun eine *kleine* Störung $\delta V(r)$ die zum Potential hinzuaddiert wird und die Bahnkurve verändert, sodass sie nicht mehr geschlossen ist. Bei jedem Umlauf dreht sich das Perihel um den Winkel $\delta\phi$.

a) Schreiben Sie die Periheldrehung $\delta\phi$ als Integral über die Radialkoordinate r und drücken Sie, um die folgenden Rechnung zu vereinfachen, den Integranden als Ableitung nach dem Drehimpuls aus. *(2 Punkte)*
Hinweis: Schreiben Sie das Integral als das Doppelte des Integrals vom kleinsten Abstand r_{min} bis zum größten Abstand r_{max}.

b) Führen Sie nun eine Taylorentwicklung des Integranden bis zur *ersten* Ordnung in der Größe δV durch. *(2 Punkte)*

c) Es ist bereits bekannt, dass die nullte Ordnung keinen Beitrag zur Periheldrehung gibt. Berechnen Sie nun jeweils die Periheldrehung in *erster* Ordnung für die beiden Störungen $\delta V(r) = \beta/r^2$ und $\delta V(r) = \gamma/r^3$. *(3 Punkte)*
Hinweis: Lösen Sie die auftretenden Integrale indem Sie einen Variablenwechsel von r nach ϕ machen, wobei $r(\phi)$ die *ungestörte* Bahn beschreibt. Führen Sie die Ableitung nach dem Drehimpuls aus a) als letzten Schritt aus, nachdem Sie das Integral berechnet haben.